BRněnský KOrespondenční Seminář

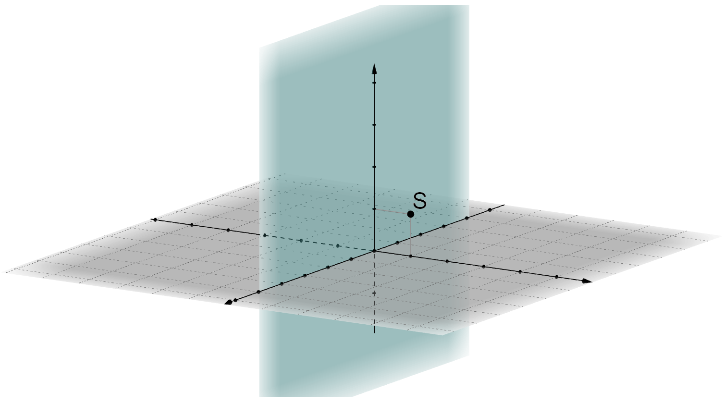
XXVIII. ročník

2021/2022

Řešení 4. série

Projektivní prostor

Úloha 4.1. Z rajčatového (červeného) trojrozměrného souřadnicového systému x, y, z ochuťme mozzarellou (nabarvěme na bílo) ty body, jejíž $z-$ová souřadnice je 0 a $x-$ová nebo $y-$ová je celočíselná (měla by vyjít čtvercová mřížka). Dále uvažme bod $S = [1, 0, 1]$ a mozzarelovými přímkami jej spojme s každým mozzarellovým bodem. Nakonec uvažme rovinu ν takových bodů, jejichž $x-$ová souřadnice je nulová (viz obrázek). Kde se nacházejí průsečíky mozzarelových přímek s rovinou ν? Znázorněte rovinu ν (ne celou, stačí nakreslit jen malou část roviny – čtverec zadaný body $[0, y, z]$, kde $y \in (-1, 1), z \in (0, 2)$).

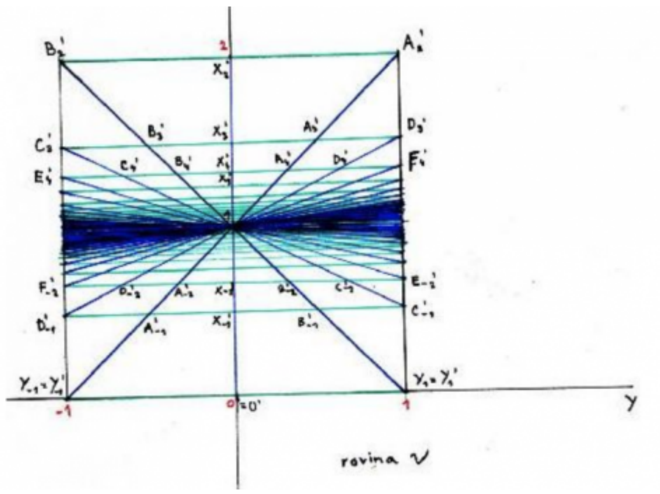


Řešení. Mozzarellové body tvoří mřížku na rovině $z = 0$. Můžeme si ji rozdělit na přímky rovnoběžné s osou y a na přímky k ní kolmé.

Ty rovnoběžné s osou y se promítnou opět na přímky rovnoběžné, se souřadnicí $z = \frac{x'}{x'-1}$, kde x' je x-ová souřadnice mozzarellového bodu, který promítám.

Přímky kolmé na osu y se promítnou jako jakési „paprsky“ spojující body $[0; -1; \frac{n\pm1}{n}]$ a $[0; 1; \frac{n\pm1}{n}]$, přičemž ale bod $[0; 0; 1]$ zůstane neobarvený (tedy červený, rajčatový) – žádný bod se na něj nepromítne, protože jeho spojnice s bodem S je rovnoběžná s rovinou $z = 0$.

Výsledný výřez z roviny ν by mohl vypadat nějak takto:



PS.: dovolila jsem si ve vzorovém řešení použít velmi povedený obrázek Emy Sedlákové.

BRKOS Team

Úloha 4.2. V projektivní rovině $\mathbb{R}P^2$ (klasická projektivní rovina) jsou dány dva vlastní body A, B. Pro které (i nevlastní) body $X \in \mathbb{R}P^2$ je odchylka přímek $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ rovna nule (tj. přímky $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ jsou rovnoběžné nebo totožné)?

Řešení. Pokud budou body A, B totožné, pak může být X libovolný bod z projektivní roviny, vyjma právě bodu $A = B$. Uvažujme tedy, že body A, B jsou různé.

V projektivní rovině můžeme všechny body rozdělit do dvou skupin – vlastní a nevlastní. Předpokládejme nejprve, že hledaný bod X je vlastní. Protože i body A, B jsou vlastní, je tato varianta úlohy ze standardní euklidovské geometrie. Pokud bychom umístili vlastní bod X někam mimo přímku $\leftrightarrow AB$, vytvořil by se trojúhelník ABX a odchylka přímek $\leftrightarrow AX$ a $\leftrightarrow BX$ by určitě byla nenulová. Tedy jedinou možností, jak můžou mít přímky $\leftrightarrow AX$, $\leftrightarrow BX$ nulovou odchylku, když X je vlastní, je, že X bude ležet na přímce $\leftrightarrow AB$ (ale bude různý od těchto dvou bodů) a tudíž budou přímky $\leftrightarrow AX$, $\leftrightarrow BX$ totožné.

Nyní předpokládejme, že bod X je nevlastní. To znamená, že si ho můžeme představit jako nějaký směr v rovině. Pokud spojíme nevlastní bod X a bod A, dostaneme přímku procházející bodem A s daným směrem X. Pokud spojíme stejný bod X s bodem B, dostaneme přímku procházející bodem B se stejným daným směrem X. Máme tedy dvě přímky stejného směru – to je definice rovnoběžných přímek, které mají vždy nulovou odchylku. Tedy vybereme-li si libovolný nevlastní bod X, vždy nám vzniknou dvě rovnoběžné přímky s nulovou odchylkou. Řešením úlohy tedy je, že zadanou vlastnost splňují všechny vlastní body na přímce $\leftrightarrow AB$ (mimo samotné body A, B) a také libovolný nevlastní bod.

Úloha 4.3. Uvažme úhel AVB, přímku $p = AB$ a obě dvě kružnice k, l, které se dotýkají ramen úhlu a přímky p. Body dotyku kružnic k a l s přímkou p označme po řadě K a L. Dokažte, že $|AK| = |BL|$ (případně $|AL| = |BK|$).

Řešení. Označme si bod dotyku přímky AV s menší kružnicí jako P a bod dotyku stejné přímky s větší kružnicí jako M. Obdobně si označme bod dotyku přímky BV s menší kružnicí jako Q a s větší kružnicí jako N. Z vlastností tečen ke kružnici z bodu vyplývá, že vzdálenosti $|VM|$ a $|VN|$ jsou stejné. Stejně tak se rovnají i vzdálenosti $|VP|$ a $|VQ|$. Tedy můžeme psát, že $|VM| - |VP| = |VN| - |VQ|$. Obě z těchto vzdáleností se dají rozdělit na součet dvou délek podle bodů A, respektive B, tedy platí rovnost $|AM| + |AP| = |BN| + |BQ|$. Každou z délek v součtu si můžeme opět pomocí vlastností tečen z bodů A, respektive B, přepsat, a to tak, že $|AM| = |AL|$ a $|AP| = |AK|$, kde K značí bod dotyku menší kružnice s přímkou p a L značí bod dotyku větší kružnice s přímkou p. Podobně provedeme úvahu pro druhou stranu rovnice a získáme tak $|AK| + |AL| = |BL| + |BK|$. Avšak úsečka AL lze zapsat jako součet $|AL| = |AK| + |KL|$ (případně jako rozdíl $|AL| = |AK| - |KL|$), a podobně $|BK| = |BL| + |KL|$ (případně $|BK| = |BL| - |KL|$). Celkově tedy po dosazení do předchozí rovnice získáváme $2|AK| + |KL| = 2|BL| + |KL|$ (případně $2|AK| - |KL| = 2|BL| - |KL|$). V každém případě už z výše uvedeného lehce plyne požadovaná rovnost $|AK| = |BL|$.

BRKOS Team

Úloha 4.4. Kolineace je zobrazení v projektivní rovině, které zachovává přímky, tj. leží-li tři body (i nevlastní) na jedné přímce, pak leží na jedné přímce i jejich obrazy. V projektivní rovině jsou dány vlastní body A, B, S, U v obecné poloze (tj. žádné 3 body neleží na jedné přímce a žádné dvě dvojice bodů nezadávají rovnoběžné úsečky). Pro kolineaci $F : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ víme, že platí:

$$F(A) = A, F(B) = B$$

$$F(U) \text{ je nevlastní}$$

$$F(X) \in \overleftrightarrow{XS},$$

kde X je libovolný zobecněný bod. Které body se zobrazí na nevlastní?

Řešení. Vzorové řešení je silně inspirováno řešením od Martina Fofa, díky.

Nejprve dokážeme, že všechny body na přímce AB se zobrazí na sebe. Nechť P je (zobecněný) bod na přímce AB. Protože kolineace zachovává přímky, víme, že body $F(A) = A$, $F(P)$ a $F(B) = B$ leží na přímce, a tedy, že $F(P)$ leží na přímce AB. Také ale víme, že $F(P)$ leží na přímce PS, a tedy leží na jejich průniku P.

Dále dokážeme, že všechny body z přímky UC, kde C je nevlastní bod přímky AB, se zobrazí na nevlastní body. Nechť P je (zobecněný) bod na UC. Pak $F(P)$, $F(U)$ a $F(C)$ leží na jedné přímce. Víme, že $F(U)$ a $F(C)$ jsou oba nevlastní body a zároveň jsou různé, jelikož $F(U)$ leží na přímce SU a $F(C) = C$ leží na přímce AB, které ze zadání nejsou rovnoběžné. Jedná se tedy o přímku nevlastních bodů a tedy i $F(P)$ je nevlastní bod.

Nakonec ukažme, že všechny body mimo přímku UC se zobrazí na vlastní body. Pro spor předpokládejme, že existuje bod Z, který neleží na přímce UC a který se zobrazí na nevlastní bod. Přímka ZA se tedy protíná s UC v jednom vlastním bodě X, který se zobrazí na nevlastní bod (protože leží na UC). Podobným argumentem jako dříve odvodíme, že z $F(Z)$ nevlastní a $F(X)$ nevlastní plyne i $F(A)$ nevlastní, což je spor, protože $F(A) = A$.

Body, které se zobrazí na nevlastní, jsou právě body na přímce rovnoběžné s přímkou AB a procházející bodem U.

Úloha 4.A. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $1 + 8k = n^2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Rovnici $1+8k = n^2$ lze upravit do tvaru $8k = n^2 - 1 \iff 8k = (n+1)(n-1)$. Pokud zvolíme n **libovolné** liché, pak $n + 1$ i $n - 1$ jsou obě sudá. Jelikož se také jedná o dvě „po sobě jdoucí“ sudá čísla (jejich rozdíl je dva), jedno z nich je nutně i dělitelné 4. Máme tedy číslo dělitelné čtyřmi a číslo dělitelné dvěma – jejich součin je zjevně dělitelný **osmi**. Číslo $(n^2 - 1)$ tedy můžeme pro libovolné liché n napsat ve tvaru $8 \cdot k$ pro nějaké přirozené k, což je přesně to, co rovnice $8k = n^2 - 1$ znamená, a lichých $n \in \mathbb{N}$ je nekonečně mnoho. Zadaná rovnice má proto skutečně nekonečně mnoho řešení.

BRKOS Team

Úloha 4.B. Je potřeba prostřít stůl pro n lidí. Kuba proto položil na jedno z míst u stolu štos talířů ležících na sobě. Spodní polovinu štosu tvoří n mělkých talířů, horní polovinu tvoří n hlubokých. Kuba by rád, aby na každém z n míst u stolu byl na konci jeden mělký talíř a na něm jeden hluboký. Kolika nejméně pohyby toho jde docílit? Za jeden pohyb považujeme vybrání nějakého štosu talířů, který se na stole vyskytuje a rozdělení ho v nějaké výšce na dva menší štosy, přičemž ten horní může položit kamkoliv na stůl (zejména na nějaký již jiný štos).

Řešení. Je potřeba alespoň $2n - 2$ pohybů. Nejprve ukážeme, že méně jich nestačí. Řekneme, že talíř je *správně umístěný*, pokud je plytký a leží přímo na stole, nebo pokud je hluboký a leží na plytkém. Na začátku jsou tedy správně umístěné dva talíře: plytký talíř úplně dole a nejnižší hluboký talíř. Nyní si stačí uvědomit, že po každém pohybu může přibýt nejvýše jeden správně umístěný talíř (a sice nejnižší talíř z právě přesunutého štosu). Na konci musí být správně umístěných všech $2n$ talířů, což ukazuje, že je potřeba alespoň $2n - 2$ pohybů.

Nyní ukážeme, jak stůl prostřít ve $2n - 2$ pohybech. Na začátku jsou všechny talíře v jednom štosu, nazvěme ho *hlavní štos*. V první fázi $(n - 1)$-krát provedeme následující operaci: zvedneme celý *hlavní štos* kromě nejnižšího talíře a položíme ho na stůl (tento o jedna nižší štos se stává *hlavním štosem* pro příští iteraci). Nyní jsou všechny plytké talíře správně umístěné. V druhé fázi opět $(n - 1)$-krát zvedneme *hlavní štos* kromě dvou nejnižších talířů (které jsou již oba správně umístěné) a položíme ho na nějaký štos tvořený pouze jedním plytkým talířem (takových štosů vzniklo $n - 1$ v první fázi). Je zřejmé, že na konci druhé fáze jsou všechny talíře správně umístěné. Stačí tedy právě $2n - 2$ pohybů k prostření stolu.

Úloha 4.C. Mějme klasickou šachovnici 8×8, kterou rozdělíme na obdélníky $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$ značí počet čtverečků na stranách obdélníků (tzn. rozdělujeme podél hranic čtverečků, nepůlíme je ani nijak nerozdělujeme). Tyto obdélníky splňují dvě pravidla:

1. Každý obdélník má v sobě stejný počet mozzarellových (bílých) jako rajčatových (červených) polí.
2. Neexistují dva obdélníky, které by byly tvořeny stejným počtem čtverečků.

Označme jejich počet a, najdi největší možné a a všechna možná rozdělení obsahů těchto a obdélníků. Ke každé možnosti uveď příklad toho, jak šachovnici na takovéto obdélníky rozdělit. (Pozn.: čtverec je též obdélník ;))

Řešení. Aby obdélník $m \cdot n$ na šachovnici obsahoval stejný počet mozzarelových (bílých) jako rajčatových (červených) polí, musí mít nutně sudý obsah. Zároveň pokud obdélník má sudý obsah, je alespoň jeden z rozměrů m, n sudý. Pokud má sudý počet sloupců, tak v každém řádku je stejně bílých a červených polí a v celém obdélníku je tak stejně červených i bílých polí. To stejné platí, pokud sloupce zaměníme za řádky.

Jelikož chceme počet obdélníků a maximalizovat a zároveň musí mít obdélníky různé obsahy, uvážíme co nejmenší obdélníky se sudým obsahem. Osm nejmenších obdélníků o rozměrech $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ má v součtu větší obsah než šachovnice $8 \cdot 8$, z toho plyne, že největší možné $a = 7$, jelikož ani osm nejmenších obdélníků se na šachovnici nevejde. Zároveň můžeme určit obsah největšího možného obdélníku jako rozdíl obsahu celé šachovnice a obsahů šesti nejmenších obdélníků, tedy $64 - (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 22$. Největší možný obsah obdélníku je 22, ale takový obdélník na šachovnici $8 \cdot 8$ nelze umístit, jelikož pro obsah 22 je dvojice m, n buď 22 a 1 nebo 11 a 2, kde v obou případech je m větší než rozměr šachovnice. Uvažujeme tak možné obdélníky obsahů $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$.

Protože součet obsahů $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 = 110$ a jedná se o deset obdélníků, možná řešení dostaneme pokud odebereme tři obdélníky se součtem obsahů 46. To lze udělat více způsoby. Obdélníky obsahů $2, 4, 6$ odebrat nemůžeme, jelikož pro ně neexistují dvojice obdélníků tak aby výsledný součet obsahů byl 46. Pokud odebereme obdélník o obsahu 8, musíme odebrat také dvojici obdélníků obsahů 18 a 20, jelikož $8 + 18 + 20 = 46$, dostáváme tak možné rozdělení obsahů mezi 7 obdélníků $2, 4, 6, 10, 12, 14, 16$. Pokud odebereme obdélník o obsahu 10, musíme odebrat dvojici obsahů 16 a 20, jelikož $10 + 16 + 20 = 46$, dostáváme tak rozdělní obsahů mezi 7 obdélníků $2, 4, 6, 8, 12, 14, 18$. Pokud se rozhodneme vynechat obdélník o obsahu 12, můžeme vynechat dvojice obsahů 16, 18 a 14, 20, čímž dostaneme dvě možná rozdělení šachovnice a to $2, 4, 6, 8, 10, 14, 20$ a $2, 4, 6, 8, 10, 16, 18$. Pokud bychom chtěli odebrat obdélník o obsahu 14, musíme nutně odebrat i nějaký obdélník obsahu menšího než 14, protože odebrání pouze obdélníků větších obsahů by přesáhlo součet 46. Tyto možnosti, kde odebíráme obdélník obsahu menšího než 14, jsme všechny rozebrali výše.

Máme tedy čtyři možná rozdělní obsahu šachovnice mezi 7 obdélníků různých obsahů, kde každý obdélník obsahuje stejně červených a bílých polí. Zároveň jsme dokázali, že šachovnici nelze rozdělit na více než 7 obdélníků splňujících zadání.

BRKOS Team

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $x^3 - y^3 = 11^z$.

Řešení. Ukážeme, že jediná řešení jsou tvaru

$$(x, y, z) \in \{(11^c, 0, 3c), (0, -11^c, 3c) | c \in \mathbb{N}_0\}.$$

Jistě pro řešení rovnice musí platit $z \geq 0$, jinak by číslo na pravé straně nebylo celé. Dále budeme postupovat tak, že ukážeme, že jediné *nesoudělné* dvojice x, y vyhovující naší rovnici jsou $x, y \in \{(1, 0), (0, -1)\}$. Nejdříve si ale vysvětleme, proč nám tato informace stačí.

Nechť x, y, z je nějaké řešení naší rovnice a předpokládejme, že x, y jsou soudělná. Označme jejich největšího společného dělitele jako d; tedy $x = da, y = db$ kde a, b jsou nesoudělná celá čísla. Potom $d^3(a^3 - b^3) = 11^z$. Dle předpokladu platí $d > 1$, tedy rovněž $z > 0$. Jelikož rozklad přirozeného čísla na součin prvočísel je jednoznačný (až na pořadí činitelů), vidíme, že $d = 11^k$ pro nějaké přirozené číslo k. Tudíž trojice $(a, b, z - 3k)$ je rovněž řešením naší rovnice. Naopak, buď (x, y, z) nějaké řešení, kde x, y jsou nesoudělná. Potom pro každé přirozené k dostáváme, že $(11^k x, 11^k y, z + 3k)$ je též řešení. Vidíme tedy, že pokud určíme řešení rovnice s nesoudělnými x a y, dostaneme z nich již všechna ostatní řešení.

Hledejme tedy řešení s nesoudělnými x a y! Vzpomeňme si, že $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Můžeme si hned rozmyslet, že pokud $x - y = 1$, po dosazení dostáváme $x^2 + xy + y^2 = (y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 3y^2 + 3y + 1$. Pokud $z = 0$, pravá strana rovnice je rovna jedné, tedy opravdu $x - y = 1$ a navíc podle předchozího výpočtu $3y^2 + 3y + 1 = 1$, což můžeme upravit na rovnici $y^2 + y = 0$. Ta má řešení $y = 0, y = -1$, tedy dostáváme řešení $(1, 0, 0), (0, -1, 0)$ a z nich násobením mocninou jedenáctky všechna řešení uvedená na začátku.

Předpokládejme dále $z > 0$. Navíc můžeme předpokládat, že nějaké z čísel x, y je v absolutní hodnotě větší než 1. Potom však $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x + y)^2 + y^2)$ je číslo větší než 1. Je to tedy mocnina jedenáctky, tedy dává po dělení jedenácti zbytek nula. Toho dále využijeme a rozebereme dvě možné situace: $x - y = 1$ a $11 | x - y$.

Pokud $x - y = 1$, podle předchozího máme $3y^2 + 3y + 1 \equiv 0 \pmod{11}$. Tedy $3y(y + 1) \equiv -1 \equiv 21 \pmod{11}$, a proto $y(y + 1) \equiv 7 \pmod{11}$. Ale můžeme si ověřit, že tuto rovnost žádné y nesplní: pro y od 0 do 11 nabývá výraz $y(y + 1)$ modulo 11 hodnot $0, 2, 6, 1, 9, 8, 9, 1, 6, 2, 0$. V tomto případě tedy žádná další řešení nemáme.

Pokud je výraz $x - y$ dělitelný jedenácti, máme $x \equiv y \pmod{11}$. Pak ale $0 \equiv x^2 + xy + y^2 \equiv 3x^2$, a tedy jedenáctka dělí x a y. My však předpokládáme, že tato čísla jsou nesoudělná, což je spor. Našli jsme tedy řešení všechna.

BRKOS Team