BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Řešení 3. série

Kombinatorické hrátky s tabulkami

Úloha 3.1. Mějme mřížkový pečicí papír složený z 20×20 čtvercových políček. Kolika způsoby lze vybarvit právě 4 políčka tak, aby každé vybarvené políčko mělo vybarveného aspoň jednoho souseda (sdílejícího hranu)?

Řešení. Téměř všechny tvary, které lze jako v zadání poskládat ze čtyř políček, vzniknou jako složení dvou obdélníčků 1×2, říkejme těmto obdélníčkům domina. Umisťujme do pole 2 domina tak, že jednomu určíme polohu a druhému spočteme počet možností, kde může být umístěno. První domino můžeme umístit celkem na $2 \cdot 20 \cdot 19 = 760$ způsobů. Pro počet možností druhého domina je nutné rozlišit typy umístění domina prvního. Rozlišujeme:

- roh (1 políčko domina leží v rohu): celkem 8 možností umístění (4 svislé a 4 vodorovné)
- leží u okraje (obě políčka domina leží hranou u okraje): $4 \cdot 17 = 68$ možností
- sousedí s okrajem (právě jedno políčko domina leží hranou u okraje): $4 \cdot 18 = 72$ možností
- ostatní: $760 - 8 - 68 - 72 = 612$ možností.

Teď určeme pro každý typ, kolik možností máme pro druhé domino. Jako zástupce si vyberme z každého typu vodorovné domino (samozřejmě jde i svislé, a finální výsledek bude stejný) a zjistěme kolik různých vodorovných (V) a svislých (S) domin můžeme k němu umístit. Počet možností v každém typu pak spočteme jako $X \cdot (V + S)$, kde X je počet možností pro 1. domino v typu.

- $A = 8 \cdot ((17 + 19 \cdot 19) + (2 \cdot 18 + 18 \cdot 19)) = 6048$
- $B = 68 \cdot ((16 + 19 \cdot 19) + (2 \cdot 18 + 18 \cdot 19)) = 51340$
- $C = 72 \cdot ((17 + 19 \cdot 19) + (2 \cdot 17 + 18 \cdot 19)) = 54288$
- $D = 612 \cdot ((16 + 19 \cdot 19) + (18 \cdot 19 + 2 \cdot 17)) = 460836$

Součtem $A + B + C + D$ dostaneme číslo 572512, což ale ještě není výsledek. Toto číslo musíme vydělit dvěma, protože každou kombinaci domin jsme výpočtem započítali 2×. To ale pořád není vše. Ještě je nutné připočíst tetromina tvaru „T“, jež také splňují podmínku vybarveného hranového souseda, ale pomocí dvou domin tento tvar nezískáme. Tento tvar se vleze do pole $18 \cdot 19$ způsoby a můžeme jej umístit ve čtyřech různých otočeních, tj. $T = 4 \cdot 18 \cdot 19 = 1368$. Kromě toho musíme odečíst ještě čtverce (tetromina tvaru „O“), jelikož jsme je na všech místech započítali 4× (2× složené z vodorovných domin a 2× ze svislých). Čtverec můžeme do pole umístit $O = 19 \cdot 19$ způsoby.

Celkový počet možností je tedy: $\frac{(A+B+C+D)}{2} + T - O = \frac{572512}{2} + 1368 - 361 = 287263.$

BRKOS Team

Úloha 3.2. Je dána tabulka 628×628 polí. Na každém poli se nachází jednička nebo nula. Můžeme na ní dělat tyto operace:

- Prohodit dva libovolné řádky nebo dva libovolné sloupce.
- Vzít sloupec a přidružit ho k jinému sloupci. Sloupec S ke sloupci T přidružíme tak, že i-té číslo ve sloupci S přičteme k i-tému číslu ve sloupci T. Pokud je výsledné číslo dva, nahradíme ho nulou.
- Cyklicky posunout čísla v n-tém řádku o n doprava. Tedy i-té číslo v n-tém řádku posuneme na pozici $i + n$, pokud je $i + n < 628$, a na pozici $i + n - 628$ jinak.

Je možné začít se čtvercem 50×50 složeným z jedniček umístěným někde v tabulce a skončit s jedinou jedničkou v celé tabulce?

Řešení. Klíčové bylo si uvědomit, že první a třetí operace celkový počet jedniček nezmění, změní pouze jejich polohu v tabulce, a tak v jistém smyslu „nejdůležitější“ je druhá operace.

Aby v tabulce zbyla jediná jednička, muselo se stát to, že se ve všech ostatních řádcích jedničky vynulovaly. Každým využitím operace (2) se počet jedniček v daném řádku sníží nejvýše o jednu, je tedy jasné, že pokud řádek původně nulový nebyl a na konci je, musela nastat situace, kdy v něm byla právě jedna jednička a po jedné aplikaci operace (2) v něm už nebyla žádná – není možné, aby se (2) snížil počet jedniček o víc než jednu.

Ale pokud je v řádku právě jedna jednička, tak ji nelze žádným z ostatních sloupců vyeliminovat, neboť ve zbylých sloupcích jsou samé nuly. Navíc platí, že zatímco v rámci řádku můžeme hodnoty cyklicky posouvat, v rámci sloupců to už nejde, tedy i když se poloha řádku v tabulce změní, jeho obsah bude vždy až na prohození sloupců a posunutí stejný. Neexistuje proto ani způsob, jak do tohoto řádku jedničku odjinud přidat, eliminovat tu která zavazí a pak s ní zase „zmizet“. Nikdy se tedy nemůže stát, že se nám podaří řádek zcela vynulovat, proto ani z čtverečku 50×50 jedniček nejsme schopní ponechat jedinou v celé tabulce.

Úloha 3.3. Ježíšek se Santou hrají speciální variantu lodí. Na čtverečkovaném papíře o rozměrech 2021×2021 čtverečků někam Ježíšek umístil jednu fregatu, t.j. vyznačil tři čtverečky za sebou v řadě (nebo sloupci) tak, aby to Santa neviděl. Následně Santa střílí (každá střela znamená, že se zeptá, jestli se na nějakém čtverečku část fregaty nachází), dokud fregatu netrefí. Určete nejmenší počet střel, které Santa v nejhorším případě musí učinit, aby fregatu alespoň jednou trefil.

Řešení. Nejprve si představme ideální síť na hracím plánu 2021×2021, kterou by Santa mohl ze svých odhadů vytvořit. Taková ideální síť by měla mít co nejméně políček a měla by loď zasáhnout pro její libovolné umístění na plánu. Co znamená nejméně políček v síti? Chtěli bychom, aby pro každé možné umístění lodi byla loď zasažena právě jedním Santovým odhadem - taková síť je jistě nejúspornější. Kdyby byla loď zasažena více než jednou pro nějaké její umístění, bylo by to „plýtvání odhady“. Zkusme nějakou takovou ideální síť najít.

Obarvěme si (zprvu obecný) čtverec $n \times n$ tímto způsobem: První čtvereček 1×1 zleva v prvním řádku obarvíme červenou, druhý zelenou, třetí modrou, čtvrtý opět červenou, pátý zelenou a tento vzor opakujeme až do konce řádku. Poté ve druhém řádku zopakujeme stejný vzor, ale tentokrát začneme s modrou barvou. Ve třetím řádku opět opakujeme stejný vzor, ale začneme se zelenou barvou, ve čtvrtém řádku začneme s červenou atd. Tímto způsobem obarvíme postupně celý čtverec.

Je jednoduché si ověřit, že ať umístíme loď 1×3 nebo 3×1 kamkoliv, vždy bude tato loď ležet na třech políčkách různé barvy, tedy bude ležet na jednom červeném, jednom zeleném a jednom modrém políčku. Pokud by se tedy Santa strefoval do políček pouze jedné z těchto barev, určitě by po strefení každého políčka dané barvy Ježíškovu loď trefil, neboť ta musí nutně ležet na políčku dané barvy. Stačí tedy zjistit, která z barev má nejméně obarvených políček.

Vzhledem ke způsobu obarvení je jasné, že pokud bude počet políček čtverce dělitelný třemi, bude počet políček obarvených červenou, zelenou a modrou stejný. Pokud by počet políček čtverce dával zbytek 1 po dělení třemi (a žádný jiný případ než tyto dva nemůže nastat), je zřejmé, že jedna barva bude mít o 1 obarvené políčko víc, než zbylé dvě (a to ta, která obarvuje jednu z hlavních diagonál - v našem případě to je červená). Santovi se tedy stačí strefovat se do políček jedné z dvou barev, které mají o jedno políčko méně než zbylá třetí - počet těchto políček by byl v tomto případě $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$, přičemž tento vzorec platí i pro případ, kdy je počet políček dělitelný třemi. Je také jasné, že strefit se do méně než $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ políček je nedostatečné, jelikož aby měl záruku, že se do lodi trefil, musel by sestřelit všechna políčka jedné barvy a k tomu by mu méně než $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pokusů určitě nestačilo.

Máme tedy obecné řešení, stačí dosadit $n = 2021$, vyjde nám 1361480 a máme hotovo.

Pozn.: Výraz $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část z čísla a.

Úloha 3.4. Mějme tabulku $n \times m$. Na každém jejím políčku je právě jedna polovina ořechu. Všechny ořechy jsou položené na políčka jedním ze dvou způsobů: vzhůru skořápkou nebo jádrem. Dva ořechy jsou sousedící, pokud se jejich políčka dotýkají hranou nebo rohem. V jednom tahu je možné otočit jeden ořech a všechny ořechy s ním sousedící. Na začátku tvoří ořechy vzor šachovnice (střídají se tedy ořechy, u kterých směřuje vzhůru skořápka a jádro). Popište, jak pomocí otáčení zařídit, aby všechny ořechy byly otočeny stejnou stranou nahoru. Pro které dvojice (m, n) to lze?

Řešení. Pro lepší popis si představme tabulku ořechů jako šachovnici černých a bílých polí. Možný tah je změna barvy vybraného pole a všech polí, které s ním sousedí. V takovém případě nazveme prostřední pole „vybrané“ a toto pole a jeho sousedy „invertované“. Ukážeme, že šachovnici rozměrů $M \times N$ lze těmito tahy transformovat na jednobarevnou tabulku právě tehdy když obě čísla M i N nedávají zbytek 2 po dělení 6. V řešení budeme indexovat od 1, tedy levý horní roh tabulky má souřadnice $(1, 1)$ a pravý dolní roh má souřadnice (M, N).

Nejdříve tvrzení ukážeme pro jednorozměrnou tabulku $N \times 1$. Protože druhá souřadnice je vždy rovna 1, budeme v tomto případě pole značit jen jeho první souřadnicí. Začněme popisem toho, barvu kterých polí jsme schopni změnit bez změny barvy polí ostatních. Pokud umíme změnit barvu pole i bez změny barvy polí ostatním, řekneme, že i je ZB. Výběrem polí 1 a 2 invertujeme pole 1 a 2 dvakrát a pole 3 jednou. Změníme tedy barvu pole 3 ale ne polí 1 a 2, a proto je pole 3 ZB. Podobně, pokud vybereme pole 4 a 5, invertujeme pole 4 a 5 dvakrát a pole 3 a 6 jednou. Tedy pole 4 a 5 zůstanou nezměněna a změní se jen pole 3 a 6. Pole 3 je ale ZB, a můžeme mu proto vrátit jeho původní barvu, a tedy 6 je ZB. Indukcí ukážeme, že každé pole dělitelné trojkou je ZB. Označme si $L = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Stejnou konstrukci samozřejmě můžeme provést i pro změnu barev zprava. Symetrickou argumentací lze proto ukázat že pole $R = \{N-2, N-5, N-8, \ldots\}$ jsou ZB. Dohromady jsme schopni změnit nezávisle na ostatních každé třetí pole zleva a každé třetí pole zprava.

V případě, že N nedává zbytek dva po dělením třemi, jsou všechna tato pole různá. Pak se mezi každými třemi po sobě jdoucími poli $i, i+1, i+2$ nachází aspoň dvě, která jsou ZB, jedno z nich patří do L a jedno do R. Pokud vybereme pole $i+1$ a následně změníme barvu dvou polí patřících do L a R, dohromady změníme barvu pouze třetího pole. Tedy i třetí pole je ZB. Tím jsme ukázali, že každé pole je ZB, a proto jsme schopni z libovolného počátečního vzoru udělat libovolný jiný vzor.

Pokud N dává zbytek dva po dělení třemi, pak množiny L a R jsou stejné a předchozí argument neplatí. Rozdělme čísla, která se nenacházejí v L do dvojic $(1,2), (4,5), (7,8), \ldots, (N-1, N)$. N může dávat zbytek pět nebo dva po dělení šesti. V prvním případě je dvojic sudý počet a pak můžeme otočit všechna pole tvaru $3+6k$. Každé otočení invertuje dvě sousední pole a ve výsledku proto budou mít všechna pole, která se nenachází v L, stejnou barvu. Není stačí změnit barvu polí z L, ale to lze, protože jsou ZB. Naopak, v druhém případě, kdy N dává zbytek dva po dělení šesti, je počet dvojic lichý. Na začátku se proto mimo L nachází lichý počet černých polí. Výběr pole a následná inverze polí sousedních změní barvu právě dvou polí mimo L, a proto se parita počtu černý polí mimo L nikdy nezmění. To ovšem znamená, že jednobarevné tabuly nelze dosáhnout, protože v takovém případě by počet černých polí mimo L byl sudý.

Tvrzení jsme zatím dokázali pro tabulky $N \times 1$. Nyní uvažme obecnou tabulku $N \times M$. Nejdříve předpokládejme, že N dává zbytek dva po dělení šesti. Sledujme například první řádek tabulky. Každý výběr buď první řádek vůbec nezmění, nebo ho změní stejně, jako bychom udělali nějaký výběr přímo v prvním řádku. Pokud bychom byli schopni celou tabulku transformovat na jednobarevnou, pak bychom byli schopni zejména transformovat její první řádek, ale podle jednorozměrného případu toto není možné. Symetricky bychom ukázali, že ani pokud M dává zbytek dva po dělení šesti, nelze jednobarevné tabulky dosáhnout. Nakonec předpokládejme, že N i M dává jiný zbytek než dva. Z jednorozměrného případu známe posloupnost výběrů jak změnit barvu každého druhé pole z tabulky $N \times 1$. Nyní si stačí uvědomit, že v případě dvojrozměrné tabulky lze výběru udělat tak, že místo tří sousedních polí v jednorozměrné tabulce, budeme otáčet vždy celé tři sousední sloupce ve dvojrozměrné tabulce. Stejnou posloupností výběrů, kterou změníme barvu každého druhého pole v jednorozměrném případu, lze proto změnit barvu v každém druhém sloupci tabulky v dvojrozměrném případu. Podobně můžeme změnit barvu každého druhého řádku. Po změněn barvy sudých řádků a sudých sloupci musí být tabulka nutně jednobarevná.

Úloha 3.A. Nalezněte všechna celočíselná řešení následující soustavy rovnic:

$$x^2 - y^2 = z^2,$$
$$x - y = z.$$

Řešení. Rozdělme si řešení na dvě části, první budeme předpokládat, že se $z = 0$, pak že se z nule nerovná.

1. Pro $z = 0$ můžeme první vztah přepsat jako $(x-y)(x+y) = 0$, z druhého vztahu dostaneme $x = y$ a zejména vidíme, že z jeho platnosti plyne platnost první rovnice ($(x-y)(x+y) = 0 \cdot (x+y) = 0$). Všechny trojice (x, y, z), které jsou řešením druhé rovnice, jsou tedy i řešením první, jedná se o trojice $(t, t, 0)$ pro $t \in \mathbb{Z}$; toto je první část řešení.

2. Pro $z \neq 0$ můžeme v první rovnici $(x+y)(x-y) = z^2$ obě strany vydělit $z = x - y$, z prvního vztahu tak dostaneme $x + y = z$. Spolu s tím, že $z = x - y$, dostaneme rovnici $x + y = x - y \iff y = -y \iff y = 0$, a tedy $x = z$. Druhou částí řešení je tedy trojice $(s, 0, s)$ pro $s \in \mathbb{Z}$ – v případě $s = 0$ je sice $z = 0$, ale z první části řešení plyne, že i $(0, 0, 0)$ je řešením, tedy nemusíme 0 z množiny možných hodnot s vyjímat.

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení, a to tvaru $(t, t, 0)$ a $(s, 0, s)$ pro $s, t \in \mathbb{Z}$.

Úloha 3.B. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ řešte funkcionální rovnici

$$f(ax + y) = a^2 f(x) + y,$$

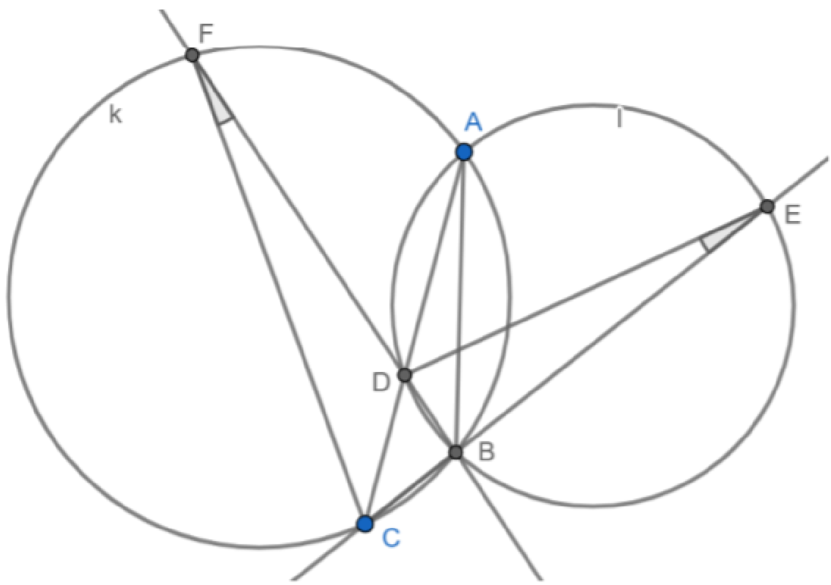
kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Řešení. Dosaďme do rovnice $x = 0$: dostaneme $f(y) = a^2 f(0) + y$. Dostáváme tedy, že f může být pouze lineární funkce tvaru $f(x) = x + c$, kde $c = a^2 f(0)$.

Nyní je potřeba provést zkoušku. Levá strana rovnice po dosazení nabyde tvaru $ax + y + a^2 f(0)$, pravá je rovna $a^2 x + a^4 f(0) + y$. Tedy zkouška vychází, právě když pro všechna reálná x platí $a(a - 1)x = -a^2 f(0)(a^2 - 1)$. To může nastat jen tehdy, pokud se obě strany rovnají nule (v opačném případě máme $x = \frac{-a^2 f(0)(a^2-1)}{a(a-1)}$, což nemůže platit pro všechna reálná x). Tedy rovnice má řešení pouze pro parametr $a \in \{0, 1\}$. V případě $a = 0$ je řešením funkce $f(x) = x$, v případě $a = 1$ je řešením libovolná lineární funkce tvaru $f(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$.

Úloha 3.C. Kružnice k a l se protínají v bodech A a B. Zvolme bod C na kružnici k tak, aby průsečík přímky AC s kružnicí l ležel uvnitř úsečky AC. Označme tento průsečík D. Bod E je průsečík BC s kružnicí l a leží mimo úsečku BC. Bod F je průsečík BD s k a leží mimo úsečku BD. Ukažte, že $|\measuredangle CED| = |\measuredangle DFC|$.

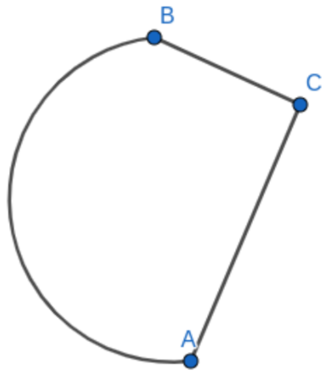
Řešení. K řešení úlohy je klíčové dokreslit si úsečku AB. Pak totiž vidíme, že $|\measuredangle DFC| = |\measuredangle BFC| = |\measuredangle BAC|$, jelikož se jedná o obvodové úhly tětivy BC kružnice k. Rovněž ale $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAD| = |\measuredangle BED| = |\measuredangle CED|$, kde druhá rovnost platí, jelikož se jedná o obvodové úhly tětivy BD kružnice l. Tím dostáváme kýženou rovnost.



BRKOS Team

Úloha 3.D. Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ existuje uzavřená neprotínající se křivka K (tedy nemá začátek ani konec, příklad na obrázku) s následujícími vlastnostmi:

1. má alespoň jednu osu souměrnosti,
2. vymezuje konvexní útvar v rovině,
3. existuje n-úhelník vepsaný K s maximálním obsahem (mezi všemi vepsanými n-úhelníky), který není osově souměrný (podle žádné osy).



Řešení. tl;dr stačí zvolit pravidelný $(n+1)$-úhelník, v něm vybrat libovolnou stranu a spojit zbylých $n-1$ vrcholů (které nejsou krajními vrcholy této strany) s libovolným vnitřním bodem této strany různým od středu.

UPOZORNĚNÍ: V průběhu řešení se dopouštím několika drobných nepřesností – například soustavně zaměňuju mnohoúhelník s body na jeho obvodu. Omluvte to vše, prosím, hyperkorektní řešení by bylo ještě delší než toto už tak ultradlouhé řešení.

STRATEGIE BOJE S ÚLOHOU: Začněme s tím, jak se k takovéto úloze vůbec postavit a na správné řešení přijít. Nejprve se zamysleme, s jakými uzavřenými, neprotínajícími se křivkami, které vymezují konvexní útvar, se na střední škole vůbec můžete setkat. Z těch rozumných (takových, že jsou dost jednoduché, abyste (abychom) o nich něco zvládli dokázat) se jedná v podstatě jen o kružnice a nějaké mnohoúhelníky. Když si člověk chvíli bude s kružnicemi hrát, tak zjistí (aspoň intuitivně), že třeba pro $n = 4$ má největší obsah čtverec a žádný jiný útvar tento obsah nemá (mimochodem toto v podstatě bylo déčko v minulé sérii). Zbývají tedy mnohoúhelníky. A jelikož si chceme zjednodušit život, tak chceme začít s těmi nejjednoduššími – pravidelnými. Ty splňují všechny podmínky ze zadání, takže můžeme zkusit něco o nich dokázat. Vzhůru do boje!

BOJ S ÚLOHOU: Nechť $n \geq 3$ je libovolné přirozené, ukážeme, že pravidelný $(n+1)$-úhelník U je kýžená křivka splňující pro naše n všechny podmínky ze zadání. Stačí ukázat, že splňuje podmínku 3, ostatní jsou zřejmé. Abychom mohli začít o podmínce 3 mluvit, tak musíme mít nejprve nějaký přehled o vepsaných n-úhelnících s maximálním obsahem. Základní myšlenka bude, že pro maximalizování obsahu chceme, aby vepsaný n-úhelník byl co nejpodobnější U. Přičemž podobností zde máme na mysli umístění vrcholů. Aby se nám o umístění vrcholů lépe hovořilo, tak pro mnohoúhelník A označme V_A množinu všech jeho

vrcholů. Formálně podobným umístěním vrcholů myslíme následující tvrzení:
Tvrzení: Nechť K je libovolný n-úhelník vepsaný U, pak existuje n-úhelník M, který je taktéž vepsaný U, jeho obsah je větší roven obsahu K a navíc platí $V_K \cap V_U \subseteq V_M \subseteq V_U$.

Závěrečná série inkluzí říká, že M vzniká tak, že vybereme n vrcholů ze všech $n+1$ vrcholů U a ty spojíme. Navíc pokud nějaký vrchol U byl zároveň vrcholem K, tak ho určitě vybereme mezi vrcholy, které tvoří M. Důkaz tohoto tvrzení si necháme na konec, protože se jedná o nejtechničtější část důkazu, a vyzbrojeni tímto tvrzením se nejprve pokusíme úlohu vyřešit.
Z tvrzení zřejmě vyplývá, že maximální obsah, který může nějaký n-úhelník vepsaný U mít, je rovnen obsahu n-úhelníka, jehož vrcholy tvoří n libovolných vrcholů U (ať je vybereme jakkoliv, tak výsledný obsah bude stejný, jelikož U je pravidelný). Nechť $U = A_0A_1 \dots A_n$ a uvažme jemu vepsaný n-úhelník $V = AA_0A_1 \dots A_{n-2}$, kde A je bod úsečky A_nA_{n-1} takový, že $|A_nA| = 2|AA_{n-1}|$ (stejně dobře by fungoval libovolný vnitřní bod této úsečky kromě středu). Ukážeme, že V má maximální obsah a není osově souměrný podle žádné osy, a U proto splňuje zadání. Nejprve si uvědomme, že osa úsečky A_nA_{n-1} je stejná jako osa úsečky A_0A_{n-2} (toto vyplývá z pravidelnosti U). Proto jsou tyto úsečky rovnoběžné a navíc $|AA_0| \neq |AA_{n-2}|$. Jelikož jsou tyto úsečky rovnoběžné, tak trojúhelníky AA_0A_{n-2} a $A_0A_{n-1}A_{n-2}$ mají stejnou výšku a tedy i stejný obsah, což nám dá:

$$S_V = S_{AA_0A_{n-2}} + S_{A_0A_1\dots A_{n-2}} = S_{A_{n-1}A_0A_{n-2}} + S_{A_0A_1\dots A_{n-2}} = S_{A_0A_1\dots A_{n-1}}.$$

Jelikož V má stejný obsah jako nějaký n-úhelník s maximálním obsahem, tak se také jedná o n-úhelník s maximálním obsahem. Zbývá ukázat, že V není osově souměrný podle žádné osy. Ukážeme, že délky úseček AA_0 a AA_{n-2} jsou různé a navíc se liší od délek všech ostatní stran V (ty jsou všechny stejné, jelikož se jedná o hrany pravidelného $(n+1)$-úhelníka U). Délky $|AA_0|$ a $|AA_{n-2}|$ jsou různé, jelikož A není střed úsečky A_nA_{n-1}. Nyní uvažme trojúhelník AA_0A_n. Jelikož úhel $\sphericalangle AA_nA_0$ má velikost alespoň $90°$ (jako vnitřní úhel v pravidelném alespoň čtyřúhelníku), tak délka úsečky AA_0 je větší než délka úsečky A_0A_n (jelikož nerovnost úhlů v trojúhelníku odpovídá nerovnosti odpovídajících stran). Jelikož A_0A_n je jedna ze stran pravidelného mnohoúhelníka U, tak AA_0 má jinou délku než všechny ostatní strany V. Analogicky se ukáže, že i AA_{n-2} má jinou délku než všechny ostatní strany V. Předpokládejme nyní, že V je osově souměrný podle nějaké osy. Pak tato osa musí stranu AA_0 zobrazit samu na sebe a stejně tak stranu AA_{n-2}. Aby osová souměrnost zobrazila úsečku samu na sebe, tak buď musí ponechat oba její krajní vrcholy na místě nebo je oba prohodit. Jelikož obě tyto úsečky mají společný vrchol A, tak se nemůže stát, že by nějaká osová souměrnost prohodila vrcholy jedné z těchto dvou úseček, takže všechny tři vrcholy A, A_0 i A_{n-2} jsou pevné body jakékoliv osové souměrnosti, která ponechává V na místě. Jelikož ale pevné body osové souměrnosti jsou právě body na ose, tak dostáváme spor, jelikož A, A_0 a A_{n-2} neleží na jedné přímce. V tedy není osově souměrný podle žádné osy a U je tak hledaná křivka ze zadání.

K zakončení celého řešení už chybí jen důkaz **Tvrzení**:
Dokazovat budeme indukcí vzhledem k hodnotě $n - |V_K \cap V_U|$.
Bázový krok: Pokud $n - |V_K \cap V_U| = 0$, tak všechny vrcholy K jsou už vrcholy U a stačí tedy zvolit $M = K$.
Indukční krok: Nechť tvzení platí pro libovolný n-úhelník K' splňující $n - |V_{K'} \cap V_U| \leq k$ a předpokládejme, že $n - |V_K \cap V_U| = k + 1$. Označme vrcholy K jako $B_0, B_1, \dots B_{n-1}$, kde B_0 sousedí s B_{n-1} a B_1, B_1 sousedí s B_0 a B_1 atd. Jelikož $k+1 \geq 1$, tak existuje

vrchol K, který leží uvnitř nějaké hrany U. BÚNO předpokládejme, že B_0 leží uvnitř hrany A_1A_2. Navíc můžeme předpokládat, že B_1 a A_1 jsou od B_2 „nalevo" a B_3 s A_2 jsou od B_2 „napravo". Jelikož B_1, B_2 a B_3 neleží na jedné přímce, tak víme, že alespoň jeden z bodů B_1, B_3 neleží na úsečce A_1A_2. Nechť je to BÚNO B_1. Podobně jako výše si nyní můžeme vyjádřit obsah K následovně:

$$S_K = S_{B_1B_2B_3} + S_{B_0B_1B_3\ldots B_{n-1}}.$$

No ale alespoň jeden z obsahů $S_{B_1A_1B_3}, S_{B_1A_2B_3}$ je větší roven $S_{B_1B_2B_3}$ (důkaz je ponechán laskavému čtenáři jako drobné cvičení – uvažte průsečík přímek A_1A_2 a B_1B_3, vyjádřete $S_{B_1B_2B_3}$ v závislosti na $|A_1B_2|$ a sledujte, kdy má tato (lineární!) funkce maximum; případ, kdy B_3 je na A_1A_2 buď vyřešte zvlášť nebo s výhodou využijte orientovaných úseček a obsahů). BÚNO předpokládejme, že se jedná o $S_{B_1A_1B_3}$. Potom dostáváme:

$$S_{B_0B_1A_1B_3\ldots B_{n-1}} = S_{B_1A_1B_3} + S_{B_0B_1B_3\ldots B_{n-1}} \geq S_{B_1B_2B_3} + S_{B_0B_1B_3\ldots B_{n-1}} = S_K.$$

Pokud B_0 neleží na straně A_0A_1, tak $N := B_0B_1A_1B_3 \ldots B_{n-1}$ je n-úhelník, který má obsah větší roven obsahu S_K a splňuje $V_U \cap V_K \subset V_N \cap V_U$.
Pokud B_0 leží na straně A_0A_1, tak N by byl degenerovaný n-úhelník, jelikož body $B_0B_1A_1$ leží na jedné přímce. Vzhledem k tomu, že U má více hran, než K vrcholů, tak na obvodu U existuje bod B' takový, že $N' = B_0A_1B_2 \ldots B_iB'B_{i+1} \ldots B_{n-1}$ je nedegenerovaný. Zřejmě každý takový N' má větší obsah než K a splňuje $V_U \cap V_K \subset V_{N'} \cap V_U$.
V obou případech jsme našli n-úhelník K' takový, že $V_U \cap V_K \subset V_{N'} \cap V_U$, tedy $|V_U \cap V_K| + 1 \leq |V_{N'} \cap V_U|$, což nám dává $n - |V_{K'} \cap V_U| \leq k$. Navíc K' splňuje, že jeho obsah je větší roven obsahu K a navíc platí $V_U \cap V_K \subset V_{K'} \cap V_U$. Podle indukčního předpokladu tedy existuje n-úhelník M vepsaný U, který má obsah větší roven obsahu K' a splňuje $V_{K'} \cap V_U \subseteq V_M \subseteq V_U$. Potom ale M má obsah větší roven i obsahu K a navíc splňuje

$$V_U \supseteq V_M \supseteq V_{K'} \cap V_U \supseteq V_U \cap V_K.$$

Tím pádem je M hledaný n-úhelník pro K, čímž je dokončen indukční krok, takže jsme dokázali **Tvrzení** a dokončili řešení celé úlohy.

BRKOS Team