BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Řešení 2. série

Polynomy

Úloha 2.1. Nalezněte polynom f, pro který platí $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2021$.

Řešení. Polynom $g(x) = x$ zadání splňuje pro $x = 1, 2, 3$, ale pro $x = 4$ je $g(4) = 4 \neq 2021$. Zjevně platí $4 + 2017 = 2021$, potřebujeme tedy něco k polynomu $g(x)$ přičíst...

Chceme k $g(x)$ přičíst nějaké $h(x)$ takové, že $g(x) + h(x) = f(x)$, což znamená, že $h(1) = 0, h(2) = 0, h(3) = 0, h(4) = 2017$. Polynom $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ má kořeny $x = 1, 2, 3$ a pro $x = 4$ má hodnotu 6, takže kdybychom jej vynásobili $\frac{2017}{6}$, získali bychom hledaný polynom $h(x) = \frac{2017}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Tedy hledaný polynom $f(x)$ je tvaru

$$f(x) = g(x) + h(x) = x + \frac{2017}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Úloha 2.2. Najděte všechny polynomy P s reálnými koeficienty vyhovující rovnici

$$P^3 - 2xP^2 + (4x - 1)P = 6x - 6$$

(tj. polynomy, pro něž rovnice platí pro každé $x \in \mathbb{R}$). Správnost svého řešení dokažte.

Řešení. Hledáme polynom P splňující rovnost

$$P^3 - 2xP^2 + (4x - 1)P = 6x - 6.$$

Povšimněme si, že levá strana lze vydělit polynomem P beze zbytku. Proto i pravá strana musí jít vydělit polynom P, což znamená, že P má stupeň nejvýše 1. Kdyby měl větší stupeň, pak by $6x-6$ dávalo zbytek $6x-6$ po dělení P. Vyřešeme tedy zvlášť případy, kdy je P konstantní nebo lineární polynom.

Kdyby byl P roven konstantě c, pak by c muselo splnit rovnici

$$c^3 - 2xc^2 + (4x - 1)c = 6x - 6$$

pro každé x, tedy zejména pro $x = 0$. Muselo by proto platit

$$c^3 - c + 6 = (c + 2)(c^2 - 2c + 3) = 0.$$

Jediné řešení této rovnice je $c = -2$, které ovšem nevyhovuje po dosazení:

$$(-2)^3 - 2x(-2)^2 + (4x - 1)(-2) = -16x - 6 \neq 6x - 6.$$

Proto musí být P lineární, a jelikož dělí $6x-6 = 6(x-1)$ beze zbytku jakožto polynom, musí být tvaru $P = a(x - 1)$. Dosadíme-li do rovnice ze zadání získáme

$$a^3(x - 1)^3 - 2xa^2(x - 1)^2 + (4x - 1)a(x - 1) = 6x - 6.$$

Podělíme-li obě strany výrazem $x - 1$, obdržíme

$$a^3(x - 1)^2 - 2xa^2(x - 1) + (4x - 1)a = 6.$$

Pokud nyní dosadíme $x = 1$, členy obsahující $x - 1$ nabydou hodnoty 0 a zbyde $3a = 6$, proto $a = 2$. Dosazením polynomu $P = 2x - 2$ do původní rovnice ověříme, že se skutečně jedná o řešení.

Úloha 2.3. Normovaný polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty splňuje následující vlastnost: pro každé prvočíslo p platí, že hodnota $P(p)$ je opět prvočíslo. Dokažte, že pokud je $P(0)$ dělitelné právě k prvočísly, kde k je přirozené číslo větší než 1, má polynom P stupeň alespoň k.

Řešení. Nechť $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Jelikož $P(0) = a_0$, tak víme, že existuje právě k různých prvočísel dělících koeficient a_0. Nechť to jsou prvočísla $p_1, \ldots, p_k$. Dosaďme libovolné p_i z nich do polynomu P:

$$P(p_i) = p_i^n + a_{n-1}p_i^{n-1} + \ldots + a_1p_i + a_0.$$

Dostáváme součet několika sčítanců, které jsou všechny dělitelné p_i, proto $p_i|P(p_i)$. Podle předpokladu je ale $P(p_i)$ prvočíslo, díky čemuž dostáváme $P(p_i) = p_i$ pro libovolné p_i dělící a_0. Zkoumejme nyní polynom $Q(x) := P(x) - x$. Dosaďme do něj libovolné z našich p_i, dostaneme $Q(p_i) = P(p_i) - p_i = 0$. Polynom Q má tedy alespoň k kořenů. Dostáváme tak dvě možnosti – buď má stupeň alespoň k, nebo se jedná o konstantní nulový polynom.

Pokud by Q byl nulový polynom, tak bychom dostali $P(x) = x$, což nemůže nastat, jelikož absolutní člen polynomu P má být dělitelný konečně mnoha prvočísly, což 0 nesplňuje. Proto Q má stupeň alespoň $k \geq 2$. Ale odečtení polynomu x od polynomu stupně alespoň dva nemůže změnit stupeň daného polynomu, proto i polynom $P(x) = Q(x) + x$ má stupeň alespoň k.

Úloha 2.4. Označme množinu všech polynomů v proměnné x s celočíselnými koeficienty jako $\mathbb{Z}[x]$. Nechť p je prvočíslo, pro které neexistuje $c \in \mathbb{Z}$ takové, že $c^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ nazveme p-rozverný, jestliže lze napsat ve tvaru $p \cdot h(x) + (x^2+1) \cdot k(x)$ pro nějaké polynomy $h, k \in \mathbb{Z}[x]$. Dokažte, že pokud je součin dvou polynomů p-rozverný, je alespoň jeden z nich rovněž p-rozverný.

Řešení. Uvažujme libovolné dva polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, jejichž součin je p-rozverný, tedy $f(x) \cdot g(x) = p \cdot h(x) + (x^2 + 1)k(x)$. Z toho dostáváme $f(x) \cdot g(x) \equiv (x^2 + 1)k(x) \pmod{p}$, tedy x^2+1 modulo p dělí součin $f(x) \cdot g(x)$. Naše p ovšem ze zadání splňuje podmínku, která zaručuje, že rovnice $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ nemá řešení, tj. $x^2 + 1$ nelze modulo p rozložit na součin lineárních polynomů. Dělí-li takovýto nerozložitelný (ireducibilní) polynom součin $f(x) \cdot g(x)$, musí dělit alespoň jednoho z činitelů (to plyne např. z věty o dělení se zbytkem). Předpokládejme tedy např., že x^2+1 modulo p dělí $f(x)$, tedy existuje polynom $k'(x) \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že $f(x) \equiv (x^2 + 1)k'(x) \pmod{p}$. Potom platí $f(x) - (x^2 + 1)k'(x) = p \cdot h'(x)$ pro nějaký polynom $h'(x) \in \mathbb{Z}[x]$, a tedy $f(x)$ je p-rozverný.

Úloha 2.A. Máme čtverec 2021×2021 políček a chceme ho nějak ozdobit. Rozhodli jsme se, že do něj postupně napíšeme všechna čísla od jedničky až dokud to půjde, a to ve tvaru spirály. Uděláme to tím způsobem, že začneme v horní řadě, na jejím konci se stočíme dolů a tak dále.

Do každého políčka se ale vejde jen jedna cifra, delší čísla proto musíme napsat do více políček (10 do dvou – do prvního jedničku, do druhého nulu). Jakou cifru napíšeme do políčka uprostřed našeho čtverce s 2021×2021 políčky?

BRKOS Team

Příklad takového čtverce pro 5×5 políček:

1	2	3	4	5
1	3	1	4	6
2	1	**7**	1	7
1	6	1	5	8
1	1	0	1	9

Řešení. Čtverec má 4084441 políček. Jelikož do něj vpisujeme po spirále, tak než se dostaneme k prostřednímu políčku, projdeme je všechny, tudíž hledáme 4084441. cifru.

Postupně vyplňujeme jednociferná čísla, těch je 9 a zabírají $9 \cdot 1 = 9$ polí, poté dvouciferná těch je 90 a zabírají $90 \cdot 2 = 180$ polí, a tak dále, až do doby, než překročíme číslo 4084411. To nastane u šesticiferných čísel. Hledaná číslice se nachází tedy v šesticiferném čísle.

Spočítáme kolik políček zabírají pěti– a méněciferná čísla, tj. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 9000 \cdot 4 + 90000 \cdot 5 = 488889$ a toto číslo odečteme od celkového počtů políček a tím dostaneme počet políček, jež ještě musíme vyplnit čísly šesticifernými. (3595552 políček).

Každé šesticiferné číslo zabírá 6 polí, vydělíme tedy zbývající počet políček šesti: $3595552/6 = 599258$, zbytek 4. Do čtverce můžeme zapsat tedy 599258 celých čísel, a výsledná cifra se bude nacházet na 4. pozici v 599259. šesticiferném čísle.

K číslu 599259 musíme ještě přičíst počet pěti– a méněciferných čísel, tj. 99999. Hledaná cifra se tudíž nachází na 4. pozici v čísle 699258. Uprostřed čtverce se bude tedy nacházet číslice 2.

Úloha 2.B. Uvažujme kružnici k a na ní tři různé body A, B, C. Označme kolmici na AB v bodě A jako p a kolmici na BC v bodě C jako q. Dokažte, že průsečík přímek p a q leží na kružnici k.

Řešení. Označme průsečík přímky p a kružnice k jako P. Můžou nastat dvě situace. Pokud úsečka AB je průměr kružnice k, je přímka p tečnou, a tedy $A = P$. Jinak body A, B, P tvoří trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu A, podle Thaletovy věty je tedy BP průměr kružnice k.

Dále nechť C je průsečík k a q. Obdobně: pokud BC je průměr, tak $C = Q$; jinak BCQ je pravoúhlý trojúhelník a BQ je průměr k.

Úsečky BQ i BP jsou průměry kružnice k, tedy $P = Q$.

Úloha 2.C. V továrně Gordona Bramsayeho na míchaná vejce je 2021 kuchyní očíslovaných 1 až 2021 a všechny jsou zhasnuté. Zároveň má továrna 2021 robotů, kteří jsou též očíslováni 1 až 2021. Robot s číslem i má za úkol v každé kuchyni s číslem dělitelným i přepnout i-krát stav žárovky (ze zhaslé na rozsvícenou a zpět). Postupně pošleme všechny roboty 1 až 2021 po celé továrně. Kolik kuchyní bude nakonec rozsvícených?

Řešení. Nechť i je index libovolné kuchyně. Ze zadání se její vypínač přepne k-krát pro každé $k \mid i$. Místnost i tedy bude rozsvícená právě tehdy, když počet jejích lichých dělitelů je sudý.

Uvažme prvočíselný rozklad čísla $i = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Každý dělitel i má prvočíselný rozklad $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, kde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ (pro $0 \le i \le n$). Proto i má $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$ dělitelů. Dělitel je lichý právě tehdy, když u prvočísla 2 má exponent 0. Proto pokud počítáme počet lichých dělitelů, tak v součinu vynecháme činitel, který odpovídá počtu výskytů čísla 2. Tento součin si označme $(\alpha'_1 + 1) \cdot (\alpha'_2 + 1) \cdots (\alpha'_{n-1} + 1)$

Číslo $(\alpha'_1 + 1) \cdot (\alpha'_2 + 1) \cdots (\alpha'_{n-1} + 1)$ je liché právě tehdy, když jsou liché všechny jeho činitelé. Tedy místnost i je rozsvícena právě když se každý exponent lichého prvočísla vyskytuje ve druhé mocnině. To nastane právě tehdy, když i je druhá mocnina, nebo dvojnásobek druhé mocniny.

Zbývá spočítat, kolik takových čísel je do velikosti 2021. Druhých mocnin je 44, neboť $44^2 \le 2021 < 45^2$. Dvojnásobků druhých mocnin je 31, neboť $2 \cdot 31^2 \le 2021 < 2 \cdot 32^2$. Dohromady zůstane 75 kuchyní rozsvícených.

Úloha 2.D. Je dána kružnice k s poloměrem r. Určete maximální obsah tětivového čtyřúhelníku vepsaného do k v závislosti na r.

Řešení. Uvedu zde důkaz inspirovaný některými zaslanými řešeními. Nejprve si uvědomíme, že každý tětivový čtyřúhelník se dá podél jedné z jeho úhlopříček rozdělit na dva trojúhelníky se společnou stranou. Obsah čtyřúhelníka se poté dá vyjádřit jako součet obsahů dvou takto vzniklých trojúhelníků. Pokusíme se nějak shora ohraničit tento obsah.

Označme si vrcholy libovolného tětivového čtyřúhelníka jako A, B, C, D. Poté platí $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Pro obsahy jednotlivých trojúhelníků platí $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v_1$ a $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v_2$, kde v_1, v_2 jsou po řadě délky výšek spuštěné z bodů B, D na úsečku AC. Pro obsah čtyřúhelníka poté platí

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v_1 + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot (v_1 + v_2).$$

Jistě pro úsečky AC a BD platí nerovnosti $|AC| \le 2r$ a $|BD| \le 2r$, jelikož jsou obě tětivami kružnice. Označme si dále průsečík těchto úseček jako E (úhlopříčky tětivového čtyřúhelníka se vždy protnou, jelikož se vždy protnou úhlopříčky libovolného konvexního čtyřúhelníka). Pro velikost výšky v_1 poté bude platit nerovnost $v_1 \le |BE|$, protože úsečka v_1 tvoří odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou BE a bude-li BE kolmá na AC, pak se budou rovnat. Obdobně platí $v_2 \le |DE|$. Sečtením obou nerovností získáme $v_1 + v_2 \le |BE| + |DE| = |BD| \le 2r$. Tedy platí nerovnosti $|AC| \le 2r$ a $v_1 + v_2 \le 2r$.

Vynásobením těchto nerovností musí platit $|AC| \cdot (v_1 + v_2) \le 4r^2$, tedy pro obsah libovolného tětivového čtyřúhelníka platí $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot (v_1 + v_2) \le \frac{1}{2} \cdot 4r^2 = 2r^2$.

Zbývá nám určit, zda je vůbec možné sestrojit tětivový čtyřúhelník takový, aby měl obsah $2r^2$. Když si ale do kružnice vepíšeme čtverec, je snadné ověřit, že skutečně požadovaný obsah má a hodnota $2r^2$ je tedy řešením úlohy.

BRKOS Team