BRněnský KOrespondenční Seminář

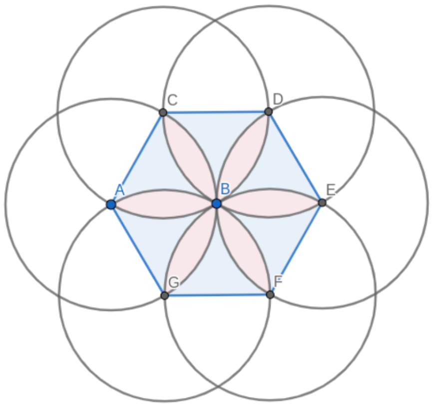
XXVIII. ročník

2021/2022

Řešení 1. série

Úvodní salát

Úloha 1.1. Je dán pravidelný šestiúhelník a šest kružnic o poloměru 1, každá se středem v jiném vrcholu a procházející středem šestiúhelníku. Jaký je obsah růžové květiny na obrázku?



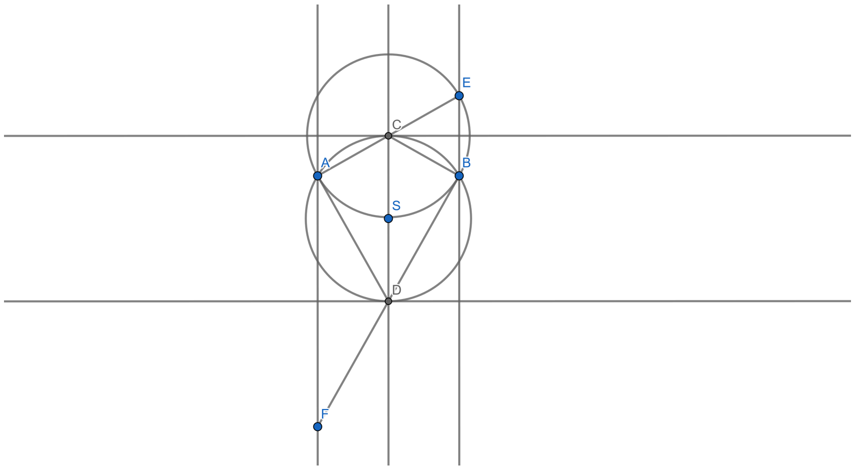
Řešení. Úloha se dala řešit mnoha různými způsoby, zde uvedeme ten nejvíce přímočarý. Stačilo si všimnout, že polovina lístku květiny, tedy dvanáctina celkového obsahu květiny, je rovna rozdílu obsahu kruhové výseče a obsahu rovnostranného trojúhelníka. Bylo tedy potřeba spočítat obsahy obou těchto útvarů. Obsah výseče je roven jedné šestině obsahu kružnice, tedy $S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2$, kde r je poloměr, v našem příkladu roven jedné. Obsah rovnostranného trojúhelníka je roven $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, kde a je strana rovnostranného trojúhelníka, v našem příkladu rovna poloměru kružnice – tudíž také rovna jedné. Výsledný obsah květiny je tedy

$$12(S_1 - S_2) = 12(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

Úloha 1.2. Nechť je dána kružnice k a body A a B, které na ní leží. Tečny ke kružnici k rovnoběžné s AB se dotýkají kružnice v bodech C a D. Zvolme body E a F, tak, že C je střed úsečky AE a D je střed úsečky BF. Dokažte, že AF je rovnoběžná s BE.

Řešení. Označme si střed kružnice k jako S. Nejdříve ukážeme, že body C, D a S leží na jedné přímce. Přímka CS je kolmá na AB, jelikož je kolmá na tečnu v bodě C. Stejně tak, přímka DS je kolmá na AB, jelikož je kolmá na tečnu v bodě D. Přímky CS a DS jsou tedy rovnoběžné. Navíc obě prochází bodem S, takže jsou dokonce totožné.

BRKOS Team



Ukažme, že přímka CD je rovněž osou úsečky AB. Víme, že osa úsečky AB (kterou budeme značit o_{AB}) je kolmá na AB a tedy rovnoběžná s CD. Osa o_{AB} navíc prochází středem S, a proto je totožná s přímkou CD.

Jelikož CD je osou úsečky AB, tak $|CA| = |CB|$ a $|DA| = |DB|$. Ze zadání je bod C středem úsečky AE, tedy $|CE| = |CA| = |CB|$. Bod B leží na Thaletově kružnici nad průměrem AE, a proto je úhel $\sphericalangle ABE$ pravý. Stejně tak ze zadání je bod D středem úsečky BF, tedy $|DF| = |DA| = |DB|$. Bod A leží na Thaletově kružnici nad průměrem BF, a proto je úhel $\sphericalangle BAF$ pravý.

Jelikož úhly $\sphericalangle ABE$ a $\sphericalangle BAF$ jsou střídavé, tak jsou přímky BE a AF rovnoběžné.

Úloha 1.3. V Hloupětíně postavili mrakodrap o n patrech, kde každé patro mělo 1 až n oken. Podmínka byla, aby pro každá dvě patra mělo to vyšší z nich alespoň tolik oken jako to nižší z nich. Dokažte, že existuje patro m s m okny (čili má přesně tolik oken, kolikáté je v pořadí odspodu).

Řešení. Úlohu dokážeme indukcí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 1$ máme pouze 1 patro, které může mít 1 až n oken, $n = 1$, proto bude mít právě 1 okno. Předpoklad, který platí pro n: existuje patro m, pro které platí, že patro má m oken. (Pozn.: „patro m" značí m-té patro.)

Dokážeme, že pokud platí pro n, platí i pro $n + 1$: Mohou nastat dvě situace:

1. patro $n + 1$ má $n + 1$ oken... tedy podmínka platí,

2. patro $n+1$ má méně než $n+1$ oken... tedy patro n má 1 až n oken, stejně tak všechna předchozí.

   Z předpokladu víme, že pro mrakodrap s n patry, kde každé patro má 1 až n oken, existuje patro m, pro které platí, že patro má m oken.

V obou situacích dostaneme, že pokud platí předpoklad pro n, platí i pro $n + 1$, a tedy indukcí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Druhým způsobem, jak jste mohli příklad řešit, bylo sporem:

Pro spor předpokládejme, že existuje mrakodrap, ve kterém žádné patro i, $1 \leq i \leq n$, nemá právě i oken.

První patro nemůže mít 1 okno, proto má alespoň dvě. Druhé patru musí mít alespoň stejně jako první, tedy alespoň 2, a zároveň nemůže mít 2. Proto musí mít alespoň tři. Atd. $i-1$ patro muselo mít vždy alespoň i oken, proto i-té musí mít alespoň $i+1$.

Proto by n-té patro mělo mít alespoň $n+1$ oken, což je spor, protože ze zadání může mít každé patro maximálně n oken.

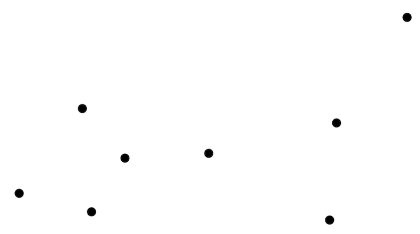
Sporem jsme dokázali, že v každém mrakodrapu splňujícím podmínky ze zadání existuje patro m s m okny.

Úloha 1.4. Mějme n různých černých bodů v rovině, pro které platí, že žádné tři neleží na jedné přímce. Tyto body můžeme přemisťovat, a to jediným způsobem: vyznačíme kdekoli v rovině červený bod, kolem kterého otočíme černý bod o libovolný úhel. Dva body budeme považovat za různé, jestliže nemají stejnou polohu v prostoru, proto pokud bychom například přemístili jeden černý bod přímo na druhý, pak splynou a stane se z nich jeden jediný.

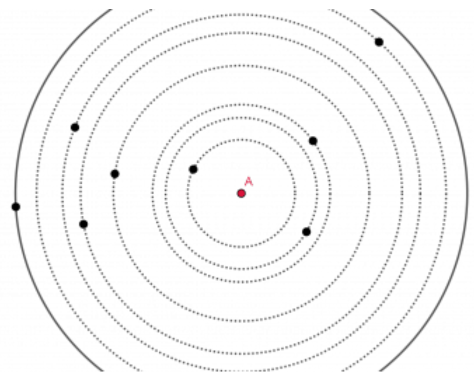
Určete nejmenší počet různých červených bodů (v závislosti na n) nutných k tomu, aby bylo zaručeno, že všechny černé body splynou v jeden.

Řešení. Pro $n=1$ není potřeba žádný červený bod, pro $n=2$ je zřejmě potřeba jeden (například střed úsečky, kterou tyto body určují). Pro $n=3$ stačí též jeden, neboť každým třem bodům neležícím na jedné přímce můžeme opsat kružnici.

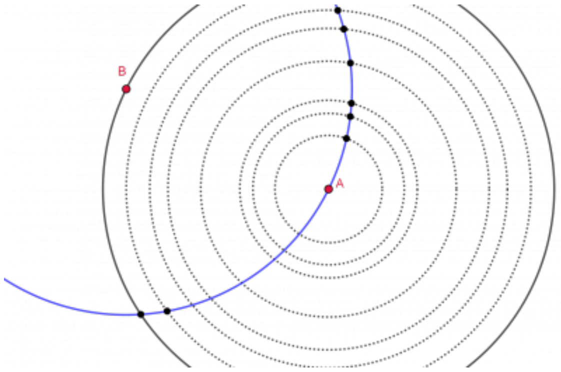
Pro $n \geq 4$ nám ale překvapivě stačí právě dva červené body. Zjevně si nevystačíme s jedním, neboť ke třem bodům ležícím na jedné kružnici snadno vhodně přidáme čtvrtý bod, který na ní neleží. Se dvěma body i tento problém vyřešíme hravě. Mějme n bodů jako na obrázku:



Nyní umístěme červený bod, označíme si ho A, zcela libovolně (vhodné je co nejblíže černým bodům), a uvažme všechny pomyslné kružnice se středem v A procházející postupně všemi ostatními body. Zaměříme se na tu s největším poloměrem, na obrázku níže je zvýrazněna plnou čárou:



Nyní zvolme další červený bod B, tentokrát na oné plnou čarou vyznačené kružnici. Sestrojme pomyslnou modrou kružnici se středem v bodě B a procházející A. Tato kružnice zjevně protíná všechny ostatní pomyslné kružnice (prochází jejich středem – bodem uvnitř každé z nich – a přitom obsahuje i bod vně každé z nich). Též platí, že každý z černých bodů můžeme rotací kolem A posunout na libovolný bod na jeho příslušné černé kružnici, zejména tedy i na bod, který zároveň leží i na kružnici modré. Posuneme tam tedy všechny body po jejich příslušných kružnicích, viz níže:



No, a nyní pomocí rotace kolem bodu B už jednoduše všechny body posuneme do jednoho, třeba do A. Jsme hotovi, a to pouze s využitím nejvýše dvou kružnic.

Úloha 1.A. Biolog Pandula se rozhodl, že vymýtí ze světa neštěstí tím, že vyrobí třináctilístek. Začal sbírat trojlístky po světě a navzájem je křížit a získávat tak nové n-lístky. Zjistil, že pravidla pro křížení k-lístku a l-lístku (kde $k \leq l$) jsou následující:

1. pokud k i l jsou prvočísla, tak získá $(l+1)$-lístek,
2. pokud jedno je prvočíslo a druhé není, tak získá $\frac{k+l}{2}$-lístek (pokud by výsledek nebyl celé číslo, tak zaokrouhlíme nahoru),
3. pokud jsou k i l složená, tak získá $2l$-lístek.

Může Pandula někdy získat kýžený 13-lístek?

Řešení. Pandula 13-lístek získat může. Postupů řešení je vícero, tento se povedl mně (a náhodou také jedné z řešitelek):

$$(3,3) \xrightarrow{1} 4$$
$$(4,4) \xrightarrow{3} 8$$
$$(3,8) \xrightarrow{2} 6$$
$$(3,6) \xrightarrow{2} 5$$
$$(8,8) \xrightarrow{3} 16$$
$$(5,16) \xrightarrow{2} 11$$
$$(11,16) \xrightarrow{2} 14$$
$$(11,14) \xrightarrow{2} 13$$

BRKOS Team

Zápis funguje tak, že do uspořádané dvojice jsem napsal, které n-lístky jsem křížil, šipka pak ukazuje na výsledek a nad šipkou je zapsáno pravidlo, které jsem použil.

Úloha 1.B. Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Označme S střed strany AB a P_C patu výšky spuštěnou z bodu C na stranu AB. Dokažte, že platí $||AC|^2 - |BC|^2| = 2|AB||SP_C|$.

Řešení. Pokud $|AC| = |BC|$, tak splynou body P_C a S, tedy $||AC|^2 - |BC|^2| = 2|AB||SP_C| = 0$.

Dále můžeme předpokládat, že bod P_C leží na polopřímce SA (díky absolutní hodnotě bychom v opačném případě mohli přejmenovat body A a B a důkaz by byl stejný). Pokud je u vrcholu A pravý úhel, pak body A a P_C splynou, tedy $2|AB||SP_C| = 2|AB||SA| = 2|AB|\frac{|AB|}{2} = |AB|^2$. Stejně tak $||AC|^2 - |BC|^2| =$ (podle Pythagorovy věty) $||BC|^2 - |AB|^2 - |BC|^2| = |AB|^2$.

Ve všech ostatních případech platí podle Pythagorovy věty $|AC|^2 = |SP_C|^2 + |AP_C|^2$ a $|BC|^2 = |SP_C|^2 + |BP_C|^2$, z čehož plyne, že $||AC|^2 - |BC|^2| = ||AP_C|^2 - |BP_C|^2| = |(|AP_C| + |BP_C|)(|AP_C| - |BP_C|)|$

Pokud je u vrcholu A ostrý úhel, bod P_C leží uvnitř úsečky AS. Potom $|AP_C| + |BP_C| = |AB|$ a $|AP_C| - |BP_C| = (\frac{|AB|}{2} - |SP_C|) - (\frac{|AB|}{2} + |SP_C|) = -2|SP_C|$.

Pokud je u vrcholu A tupý úhel, bod P_C leží na polopřímce opačné k AS. Potom $|AP_C| + |BP_C| = (|SP_C| - \frac{|AB|}{2}) + (|SP_C| + \frac{|AB|}{2}) = 2|SP_C|$ a $|AP_C| - |BP_C| = (|SP_C| - \frac{|AB|}{2}) - (|SP_C| + \frac{|AB|}{2}) = -2\frac{|AB|}{2} = -|AB|$.

V obou případech tedy $||AC|^2 - |BC|^2| = |(|AP_C| + |BP_C|)(|AP_C| - |BP_C|)| = |-2|AB||AP_C|| = 2|AB||SP_C|$.

Úloha 1.C. Kružín a Zrcadlín hrají v rovině následující hru: Střídají se v tazích s tím, že Kružín začíná a každý udělá právě 2021 tahů. Kružín ve svém tahu umístí do roviny kruh o poloměru 1. Zrcadlín umístí přímku a celou rovinu (všechny útvary, které se v rovině objevily před umístěním) zobrazí v osové souměrnosti podle této přímky. Kružínův cíl je, aby na konci v rovině bylo co nejvíce útvarů. Útvary, které splynou (protože jsou zobrazeny na sebe navzájem nebo protože jsou umístěny tam, kde už nějaký útvar je) se počítají jako jeden. Kolik nejméně může na konci hry v rovině být útvarů, pokud Kružín hraje nejlépe, jak to jde?

Řešení. Řešením je, že na konci může být nejméně 4042 útvarů. Dokážeme to ve dvou krocích. Nejprve ukážeme, že Zrcadlín může hrát tak, že na konci bude nanejvýš 4042 útvarů (ať už Kružín hraje jakkoliv) a následně ukážeme, že Kružín zase může hrát tak, že na konci bude alespoň 4042 útvarů (ať už Zrcadlín hraje jakkoliv).

Začněme se strategií pro Zrcadlína. Ukážeme, že Zrcadlín může hrát tak, že v každém tahu přibude nanejvýš jeden útvar. Pro Kružínovy tahy to je zřejmé – Kružín prostě umístí jeden útvar do roviny a víc se toho neděje. Stačí tedy řešit Zrcadlínovy tahy. První Zrcadlínův tah probíhá ve chvíli, kdy je v rovině umístěn právě jeden Kružínův kruh, Zrcadlínovi stačí tedy vést jeho přímku středem tohoto kruhu. Tím pádem se kruh zobrazí sám na sebe a jediný útvar, který přibude, je Zrcadlínova přímka. V každém dalším tahu Zrcadlín umístí přímku na totéž místo, jako v tahu prvním. Ukážeme, že pro libovolné přirozené n přibyde v n-tém tahu opravdu pouze nejvýše jeden útvar.

Kruh, který umístil Kružín ve svém n-tém tahu, se může zobrazit na nějaký nový kruh a jeden útvar nám tak může přibýt. Nyní uvažujme kruhy K, které vznikly v k-tém

Kružínově tahu pro $k < n$. Jelikož po celou dobu máme jedinou osu souměrnosti, z každého z těchto kruhů může vzniknout nejvýše jeden další kruh K' – ten ovšem vznikne již v k-tém Zrcadlínově tahu. Tedy z K nic nového v n-tém tahu nevznikne. Nakonec uvažujme kruhy K, které vznikly v k-tém tahu Zrcadlína, $k < n$. Ty vznikly jako obraz v osové souměrnosti nějakého kruhu K', tj. nic nového z nich již nevznikne – po celou dobu máme jedinou osu souměrnosti a ta je může zobrazit pouze zpět na K'. Tím jsme hotovi.

Když v každém tahu přibude nanejvýš jeden útvar, tak po 2021 tazích Kružína a 2021 tazích Zrcadlína budeme mít v rovině nanejvýš $2 \cdot 2021 = 4042$ útvarů.

Nyní ukážeme strategii pro Kružína takovou, že v každém tahu přibude alespoň jeden útvar. V prvním tahu může kruh položit kamkoliv a jeden útvar přibude, stejně tak přibude alespoň jeden útvar v Zrcadlínově prvním tahu (před Zrcadlínovým prvním tahem v rovině nebyla žádná přímka a po něm tam je). V každém dalším tahu může Kružín udělat následující: podívá se na množinu M obrazů všech dosud umístěných kruhů v osových souměrnostech podle všech dosud umístěných přímek a svůj nový kruh K umístí tak, aby platilo následující:

1. nepřekrýval se s žádným již dosud položeným kruhem,
2. nepřekrýval se s žádným kruhem v M,
3. střed nového kruhu neležel na žádné již umístěné přímce.

Toto jistě může udělat: uvažme libovolný kruh $\tilde{K}$ obsahující všechny kruhy z M (ten existuje, jelikože množina M je konečná). Stačí umístit kruh K, tak aby se s $\tilde{K}$ nepřekrýval – to zjevně jde – a aby jeho střed neležel na žádné z položených přímek: to jde také, jelikož je jich konečně mnoho.

Jelikož Kružín umístil K tak, že se nepřekrýval s žádným již dosud položeným kruhem, tak určitě v Kružínově tahu jeden útvar přibude. Zbývá ukázat, že přibude i v Zrcadlínově tahu. Pokud Zrcadlín umístí svou přímku jinam než na místo, kde už nějaká přímka je, tak určitě přibude alespoň tato přímka. Pokud umístí přímku na některou z již existujících přímek, tak jelikož střed K není na žádné takové přímce, tak se K nezobrazí sám na sebe. Jelikož K není v M, tak se K nezobrazí ani na žádný z již položených kruhů, což dohromady dává, že obraz K bude úplně nový kruh, tedy i v tomto případě alespoň jeden útvar přibude.

Dohromady tedy v každém tahu přibude alespoň jeden útvar, tedy po 2021 tazích obou hráčů přibude alespoň $2 \cdot 2021 = 4042$ útvarů.

Úloha 1.D. Dokažte, že soustava rovnic

$$a + b = c + d$$
$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3 + K$$

má celočíselné řešení právě tehdy, když K je celočíselný násobek čísla 6.

Řešení. První důležitou věcí, kterou je třeba si uvědomit, je, že dokazujeme-li ekvivalenci, musíme dokázat dvě implikace, v našem případě:

1. pokud má soustava celočíselné řešení, tak 6 dělí K,
2. pokud 6 dělí K, existuje celočíselné řešení naší soustavy.

Začneme první implikací, která je jednodušší. Existuje mnoho způsobů, jak dojít k cíli. Do tohoto vzorového řešení jsem si vybral velmi elegantní řešení inspirované Štěpánem Varhaníkem. Předpokládáme, že soustava má celočíselné řešení a, b, c, d, a odečteme první rovnici od druhé. Dostaneme:

$$(a^3 - a) + (b^3 - b) = (c^3 - c) + (d^3 - d) + K.$$

Výraz $x^3 - x$ si můžeme rozložit na součin jako $(x-1)x(x+1)$. Za předpokladu, že x je celé číslo, se tedy jedná o součin tří po sobě jdoucích celých čísel. Tedy alespoň jedno z nich musí být dělitelné dvěma (každé druhé číslo je dělitelné dvěma) a stejně tak musí být jedno z nich dělitelné třemi (každé třetí číslo je dělitelné třemi). Tedy $x^3 - x$ je pro každé $x \in \mathbb{Z}$ dělitelné dvěma i třemi, tedy i šesti. Jelikož

$$K = (a^3 - a) + (b^3 - b) - (c^3 - c) - (d^3 - d),$$

dostáváme, že 6 dělí K.

Druhá implikace je o něco složitější. Nyní předpokládáme, že K je ve tvaru $6k$ pro nějaké celé číslo k a chceme ukázat, že pro každé k má soustava

$$\begin{aligned} a + b &= c + d, \\ a^3 + b^3 &= c^3 + d^3 + 6k \end{aligned}$$

celočíselné řešení. Jak na to? Nejlepší způsob je nějak upravit druhou rovnici do součinového tvaru. Jedna cesta (inspirováno Ríšou Blažkem) je vyjádřit z první rovnice $d = a + b - c$ (tím se zbavíme první rovnice) a dosadit do druhé:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= c^3 + a^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 6abc + 3ac^2 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + 6k \\ 2k &= -a^2b + a^2c - ab^2 + 2abc - ac^2 + b^2c - bc^2 \\ 2k &= (a+b)(a-c)(c-b) \end{aligned}$$

(Jak poznat, že si takový zákeřný mnohočlen můžeme rozložit na tak pěkný součin tří závorek? Zkušení olympionici to vidí, my ostatní můžeme zkusit hodit mnohočlen do wolframalpha a podívat se, co nám s tím udělá.)

Abychom tedy našli řešení naší soustavy, stačí najít řešení rovnice $(a+b)(a-c)(c-b) = 2k$. Na to existuje velmi pěkný trik, tj. řešit ekvivalentní soustavu lineárních rovnic. Uvědomme si, že tato rovnice má řešení, právě když existují celá čísla u, v, w taková, že $uvw = 2k$ a následující soustava má celočíselné řešení:

$$\begin{aligned} a + b &= u, \\ a - c &= v, \\ c - b &= w. \end{aligned}$$

Vyřešit takovouto soustavu je pro nás jednoduché: dostaneme $a = \frac{u+v+w}{2}, b = \frac{u-v-w}{2}, c = \frac{u-v+w}{2}$. Celošíselná řešení a, b, c tedy dostaneme, právě když je $u + v + w$ sudé (pak jsou jistě sudá i čísla $u - v - w$, $u - v + w$). Zbývá tedy rozhodnout, zda můžeme vždy rozložit $2k$ na součin tří činitelů tak, aby byl jejich součet dělitelný dvěma. Ale to můžeme, např. $u = 2k, v = 1, w = 1$. Tím najdeme řešení původní soustavy $(a, b, c, d) = (k+1, k-1, k, k)$. Zkouškou si ověříme, že se opravdu jedná o řešení.

BRKOS Team