Řešení 5. série

Báze a moduly

Úloha 5.1. V exilu, ve kterém je pan José, se nevyskytovala žádná čísla až do dne, kdy plukovník Motýl donesl baťůžek plný čísel. V baťůžku je sedmička a s každým číslem tam je i číslo o 3 větší. Navíc každé číslo, které v baťůžku je, se tam dostalo tak, že se k sedmičce přičetl nějaký přirozený násobek čísla 3. Pan José si občas tato čísla půjčuje a hraje si s nimi. Vždycky si vybere dvě čísla (může i dvakrát to stejné), která už někde mají, sečte je a výsledek si schová k sobě do šuplíku. Pokud José čísla zrovna nesčítá, tak jsou tedy všechna čísla buď v šuplíku, nebo v baťůžku. Čísla, která sčítal, pak vždycky vrátí neporušená na místa, ze kterých je vzal. Jaké je největší číslo, které panu Josému nemůže projít rukami? (Tedy číslo, které nemůže mít José v šuplíku a ani ho plukovník Motýl nemá v baťůžku.)

Řešení. Správná odpověď je 18.

V batohu pana Motýla se nacházejí všechna čísla, která dávají zbytek 1 po dělení 3 a zároveň jsou větší nebo rovna 7. Každé z nich můžeme tedy zapsat ve tvaru $7 + 3k = 1 + 3(2 + k)$, kde $k \in Z_0^+$.

Sečtením dvou čísel z batohu získáme všechna čísla větší nebo rovna 14, která dávají zbytek 2 po dělení 3 (ta se pak nacházejí v šuplíku). $(7+3m)+(7+3n) = 14+3(m+n) = 2 + 3(4 + m + n)$, kde $m, n \in Z_0^+$.

Sečtením dvou čísel ze šuplíku dostaneme číslo se zbytkem 1 po dělení 3, tedy takové, které se již nachází v batohu. Sečtením čísla ze šuplíku a čísla z batohu dostaneme libovolné číslo, které je dělitelné 3 (dávající zbytek 0) a zároveň větší nebo rovno 21. $(14 + 3m) + (7 + 3n) = 21 + 3(m + n) = 3(7 + m + n)$

Největší číslo dělitelné 3, které nedokážeme získat, je 18. Největší číslo dávající zbytek 1 po dělení 3, které nedokážeme získat, je 4. Největší číslo dávající zbytek 2 po dělení 3, které nedokážeme získat, je 11.

Největší z těchto čísel je 18. Každé větší jistě získat dokážeme.

Úloha 5.2. V tomto příkladě zafixujeme následující interpretaci $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Uvažujme libovolné zobrazení $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ splňující

$$f(\begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}).$$

Dokažte, že existují prvky $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(\binom{a}{b}) = \binom{ax+by}{az+bw}$.

BRKOS Team 2021

Řešení. Podle zadání platí $f(\binom{a}{b}) = f(\binom{a+0}{b+0}) = f(\binom{a}{b}) + f(\binom{0}{0})$, tedy $f(\binom{0}{0}) = 0$. Dále pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $0 = f(\binom{0}{0}) = f(\binom{a-a}{b-b}) = f(\binom{a}{b})) + f(\binom{-a}{-b}))$, a tudíž $f(\binom{-a}{-b})) = -f(\binom{a}{b}))$.

Nyní uvažujme pouze kladná celá čísla a, b. Kladné celé n je součtem n jedniček, tedy dostaneme následující:

$$f(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}a+0\\0+b\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1+\dots+1\\0\end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix}0\\1+\dots+1\end{pmatrix}) =$$
$$= f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + \dots + f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) + \dots + f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = a \cdot f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + b \cdot f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}).$$

Označme nyní $f(\binom{1}{0}) = \binom{x}{z}, f(\binom{0}{1}) = \binom{y}{w}$. Vzhledem k předchozímu výpočtu platí pro kladná celá čísla a, b následující: $f(\binom{a}{b}) = a \cdot \binom{x}{z} + b \cdot \binom{y}{w} = \binom{ax+by}{az+bw}$. Vzhledem k úvahám v prvním odstavci to platí pro libovolná celá čísla a, b.

Úloha 5.3. Zdůvodněte, proč má rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 + \frac{4x^2y^2}{z} + \frac{4x^2z^2}{y} + \frac{4y^2z^2}{x} + \frac{65xyz}{4} = 0$$

nekonečně mnoho celočíselných řešení.

Řešení. Nejdříve ukažme, že pokud vynásobíme řešení (x, y, z) naší rovnice celočíselnou konstantou k, tak dostaneme opět řešení rovnice:

$$(kx)^3 + (ky)^3 + (kz)^3 + \frac{4(kx)^2(ky)^2}{kz} + \frac{4(kx)^2(kz)^2}{ky} + \frac{4(ky)^2(kz)^2}{kx} + \frac{65kxkykz}{4} =$$
$$= k^3x^3 + k^3y^3 + k^3z^3 + k^3\frac{4x^2y^2}{z} + k^3\frac{4x^2z^2}{y} + k^3\frac{65xyz}{4} =$$
$$= k^3 \cdot (x^3 + y^3 + z^3 + \frac{4x^2y^2}{z} + \frac{4x^2z^2}{y} + \frac{65xyz}{4}) = k^3 \cdot 0 = 0.$$

(Přičemž u poslední rovnosti jsme využili toho, že (x, y, z) je řešením původní rovnice.) Stačí nám najít pouze jedno řešení rovnice. To je například $(4, 1, -1)$, což lze ověřit dosazením.

Ačkoliv je tímto úloha vyřešena, je dobré zmínit, jak se dá řešení získat. (Inspirováno Áďou Heroudkovou.) Stačí najít nějaké racionální řešení a vynásobit ho vhodnou konstantou. Zvolme tedy $x = 1$. Abychom se zbavili třetí mocniny, tak zvolme $z = -y$. Dostaneme tak rovnici $1 + 4y^4 - \frac{65}{4}y^2 = 0$. Po substituci $a = y^2$ dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž řešením je $\frac{1}{16} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{4}$. Dostaneme tedy řešení $(1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ a po vynásobením čtyřmi máme řešení $(4, 1, -1)$.

Úloha 5.4. Šachové pole je n-dimenzionální nekonečná šachovnice. Každý se v něm může přepravovat pouze v doprovodu krále. Jaký je nejmenší počet různých tahů, které krále musíme naučit, aby se dostal odkudkoli na libovolné políčko šachovnice? Jelikož se jedná o krále, tak každý tah, který ho naučíme, bude nanejvýš o jedno políčko v každém ze směrů. Formálně n-dimenzionální šachovnicí máme na mysli množinu všech uspořádaných n-tic celých čísel. Tah, který krále můžeme naučit, je libovolná n-tice, jejímiž prvky jsou pouze čísla 0, 1 nebo -1. Pokud král stojí na nějakém políčku šachovnice $(a_1, a_2, ..., a_n)$

a chce se pohnout pomocí nějakého naučeného tahu $(x_1, x_2, ..., x_n)$, tak se pohne na políčko $(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n)$.

Řešení. Dokážeme, že odpovědí je číslo $n + 1$.

Nejprve ukážeme, že budeme potřebovat alespoň $n+1$ pohybů. Nechť $P = \{p_1, ..., p_k\}$ je nějaká množina pohybů takových, že se pomocí nich král opravdu dostane všude. Dostane se tedy i do bodu $-p_1$. To ale znamená, že existují nezáporná celá čísla $a_1, ..., a_k$ taková, že $-p_1 = a_1 \cdot p_1 + \cdots + a_k \cdot p_k$. Z toho dostáváme následující vztah:

$$(a_1 + 1) \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \cdots + a_k \cdot p_k = 0.$$

Tedy prvky $p_1, ..., p_k$ jsou v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}^n$ lineárně závislé. Jelikož zároveň celé $\mathbb{Z}^n$ generují, tak ze studijního textu potom víme, že $k > \dim(\mathbb{Z}^n) = n$. Tedy počet pohybů je alespoň $n + 1$.

Nyní stačí najít $n + 1$ pohybů, pomocí nichž se král dostane kamkoli. To mohou být např. tyto:

1. $e_i = (0, 0, \ldots, 0, x_i = 1, 0, \ldots, 0)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. $e_0 = (-1, -1, \ldots, -1)$.

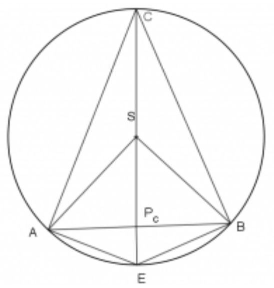
Jsme totiž schopni seskládat pohyb $-e_i = (0, 0, \ldots, 0, x_i = -1, 0, \ldots, 0)$ jako

$$-e_i = e_0 + e_1 + \cdots + e_{i-1} + (e_i \text{ chybí}) + e_{i+1} + \cdots + e_n,$$

čímž pak dostaneme sadu pohybů ve všech souřadnicových směrech a zřejmě jsme schopni se dostat kamkoli.

Úloha 5.A. Uvažujme kružnici o průměru 2020 a v ní vepsaný rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku rovnu roku, v němž byla vydána Zlatá bula sicilská. Určete obsah tohoto trojúhelníku.

Řešení. Protože se jedná o rovnoramenný trojúhelník, je výška na stranu AB zároveň osou této strany, tedy prochází středem zadané kružnice. Hledáme tedy obsahy dvou trojúhelníků: $\triangle ABC$ a $\triangle AEB$ (viz náčrtek). Navíc známe $|AB| = 1212$, dále $|AS| = |SC| = |SB| = 1010$ (neboť se jedná o poloměry kružnice).



Obsah trojúhelníka ABC je dán vztahem $\frac{|AB| \cdot |CP_c|}{2} = \frac{|AB| \cdot (|CS| + |SP_c|)}{2}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník P_cBS získáme $|P_cS| = \sqrt{|BS|^2 - |BP_c|^2}$; $|BP_c| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = 606$, a tedy $|SP_c| = 808$. Proto je $S_{\triangle ABC} = \frac{1212 \cdot (808 + 1010)}{2} = 1101708$.

Obsah trojúhelníka AEB je dán vztahem $\frac{|AB| \cdot |EP_c|}{2} = \frac{|AB| \cdot (|ES| - |SP_c|)}{2} = \frac{1212 \cdot (1010 - 808)}{2} = 122412$.

BRKOS Team 2021

Úloha 5.B. Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici se středem S a poloměrem r. Určete, co musí platit pro trojúhelník ABC, aby body A, B, C, S tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku (tedy určete, podmínky, při kterých tvoří body A, B, C, S konvexní čtyřúhelník, ale pokud nejsou splněny, tak netvoří).

Řešení. Řešení inspirováno Klárkou Grinerovou, která měla moc pěkné a čitelné řešení.

Rozlišme tři případy.

1. Bod S je vnitřním bodem trojúhelníka ABC a zároveň neleží na žádné jeho straně. To platí, právě když jsou všechny vnitřní úhly trojúhelníka ABC menší než $90°$, jelikož střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran trojúhelníka ABC. Protože bod S leží uvnitř trojúhelníka, víme, že úhel u vrcholu S ve čtyřúhelníku musí být dopočtem jednoho z úhlů $\sphericalangle ASB, \sphericalangle BSC$ nebo $\sphericalangle CSA$, ty jsou ale všechny menší než $180°$.

2. Bod S leží na jedné ze stran trojúhelníka ABC. To platí právě tehdy, když je trojúhelník pravoúhlý a tedy $ABCS$ vůbec netvoří čtyřúhelník.

3. Bod S leží mimo trojúhelník ABC, což nastane, právě když je trojúhelník tupoúhlý. Bez újmy na obecnosti nechť AB je ta tětiva, pro kterou platí, že přímka AB rozděluje rovinu na dvě poloroviny tak, že C a S leží v různých polorovinách. Pak $|\sphericalangle ACB| > 90°$ je tupý úhel. Pak ale z věty o obvodovém úhlu platí $|\sphericalangle ASB| = 360° - 2 \cdot |ACB| < 180°$. Proto je čtyřúhelník $ASBC$ konvexní.

Dostáváme: čtyřúhelník $ASBC$ je konvexní právě tehdy, když je trojúhelník ABC tupoúhlý.

Úloha 5.C. Nalezněte všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující rovnici pro všechna reálná x a y:

$$f(xy) - f(x) + f(x+1) = 2x + f(1) + x^2 f(-y) + f(0).$$

Řešení. Předpokládejme, že rovnice má nějaké řešení f. Začněme dosazením $y = 1$, dostaneme:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x) + f(x+1) &= 2x + f(1) + x^2 f(-1) + f(0) \\ f(x+1) &= 2x + f(1) + x^2 f(-1) + f(0). \qquad (1) \end{aligned}$$

Mimochodem tento tvar je extrémně užitečný, protože z něj vidíme, že libovolné řešení je nějaká kvadratická funkce (případně lineární, pokud by bylo $f(-1) = 0$). Dosaďme do 1 ještě navíc $x = 0$:

$$f(1) = f(1) + f(0) \implies f(0) = 0.$$

Nyní do (1) dosaďme ještě $x = t - 1$, abychom na levé straně měli $f(x)$ a ne $f(x+1)$:

$$f(t) = 2t - 2 + f(1) + (t-1)^2 f(-1). \qquad (2)$$

Vidíme, že na to, abychom určili f, stačí určit $f(1)$ a $f(-1)$. To získáme pomocí následujících dosazení:

$$\begin{aligned} t = 0: &\qquad 0 = -2 + f(1) + f(-1) \\ t = -1: &\qquad f(-1) = -4 + f(1) + 4f(-1). \end{aligned}$$

Odečtením rovnic od sebe a následnou úpravou dostaneme $f(-1) = 1$, což nám po dosazení do první rovnice dá $f(1) = 1$. Po dosazení do 2 už získáme předpis funkce f:

$$f(t) = 2t - 2 + 1 + t^2 - 2t + 1 = t^2.$$

Zkouškou zjistíme, že funkce definovaná předpisem $f(x) = x^2$ je opravdu řešením.

Úloha 5.D. V rovině se nachází 2021 jednotkových čtverců tak, že každá úsečka, která se v rovině nachází, je rovnoběžná s jednou z os. Dokažte, že součet velikostí ploch pokrytých právě lichým počtem čtverců je větší nebo roven jedné.

Řešení. Nejdříve dokažme jednorozměrnou verzi tvrzení: Pokud umístíme na přímku lichý počet úseček délky 1, bude součet délek úseků, které jsou pokryty lichým počtem úseček, roven aspoň jedné. Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem počtu úseček. Součet délek úseků, které jsou pokryty lichým počtem úseček, budeme nazývat skóre. Pro jednu úsečku je tvrzení triviálně splněno, protože skóre je rovno jedné. Předpokládejme tedy, že se na přímce nachází $n + 2$ úseček, kde n je liché, a že pro n úseček tvrzení platí. Pokud dvě úsečky splývají, pak odebrání obou nezmění celkové skóre, které je po odebrání, a proto i před odebráním, aspoň jedna. V případě, že žádné dvě úsečky nesplývají, uvažme nejlevější úsečku. Jejím posunutím doprava tak, aby splynula s druhou nejlevější úsečkou, skóre buď zmenší, nebo nezmění. Přesunutím ovšem získáme první případ, o kterém jsme dokázali, že má skóre aspoň jedna. Podle principu matematické indukce platí tvrzení pro každé liché n.

Nyní můžeme dokázat původní tvrzení. Rozdělme rovinu horizontálními přímkami tak, aby každá horizontální hrana čtverců ležela na nějaké přímce. Přímky tedy ohraničují takové pásy, že mají průnik s každým čtvercem buď po celé výšce pásu, nebo vůbec. Nechť h je výška některého pásu obsahujícího lichý počet čtverců. Podle jednorozměrné verze tvrzení je součet ploch pokrytých lichým počtem čtverců v tomto pásu roven aspoň h. Vyberme ty pásy, které mají průnik s lichým počtem čtverců. Opět podle jednorozměrné verze tvrzení, je součet všech výšek těchto pásů roven aspoň jedné. Celkově je tedy má tedy plocha pokrytá lichým počtem čtverců obsah aspoň jedna.