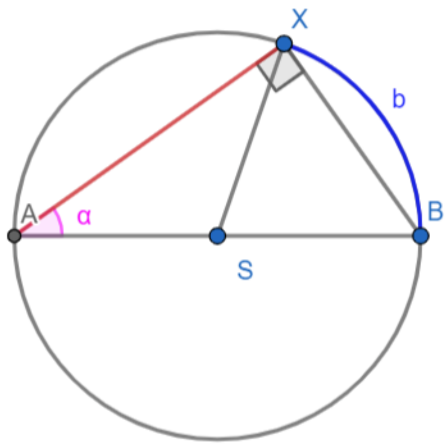
Řešení 4. série

ÚHLY VŠUDE, KAM SE PODÍVÁŠ

Úloha 4.1. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Dále jsou dány různé body A, B na kružnici k takové, že $|AB| = 2|AS| = 2|BS|$. Nakonec máme bod X, který leží na kružnici k a je různý od A, B. Označme b délku kruhového oblouku příslušného středovému úhlu $\measuredangle XSB$ a $\alpha = \measuredangle XAS$. Určete poměr $\frac{|AX|}{b}$ za předpokladu, že $\alpha = \cos(\alpha)$.

Řešení.



Snadno nahlédneme, že délka úsečky AB je $2r$, tedy AB je průměrem kružnice k.
Z vlastností středového a obvodového úhlu plyne $|\sphericalangle XSB| = 2\alpha$.
Odtud dostáváme $b = r \cdot |\sphericalangle XSB| = r \cdot 2\alpha$.

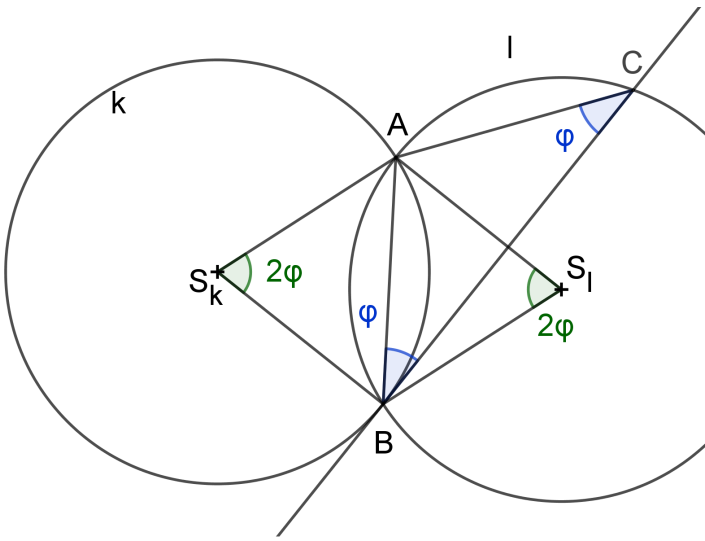
Z Fofovy (Thaletovy) věty plyne: $|\sphericalangle BXA| = \frac{\pi}{2}(= 90^\circ)$, proto $\cos(\alpha) = \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AX|}{2r}$, proto $|AX| = \cos(\alpha) \cdot 2r$. Odtud hledaný poměr snadno dopočítáme:

$$\frac{|AX|}{b} = \frac{\cos(\alpha)2r}{r \cdot 2\alpha} = \frac{\cos(\alpha)}{\alpha} = 1.$$

BRKOS Team 2021

Úloha 4.2. Shodné kružnice k a l se protnou v bodech A a B. Nechť C je průsečík tečny ke kružnici k v bodě B s kružnicí l. Dokažte, že $|AB| = |AC|$.

Řešení.

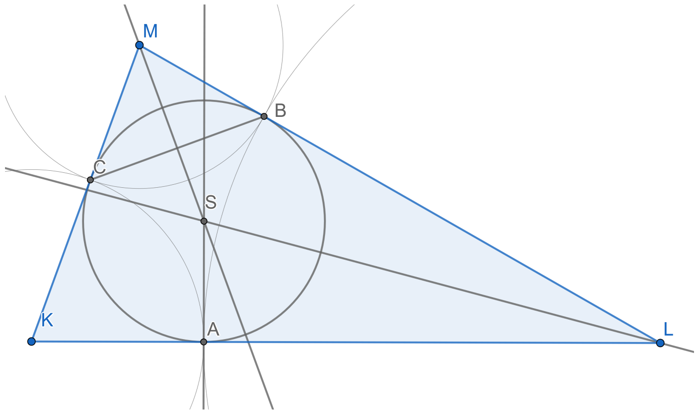


Označme si S_k, S_l středy kružnic k, l a nechť $|\sphericalangle AS_kB| = 2\phi$. Úsečka AB je tětivou jak k, tak l. Poloměry těchto kružnic se rovnají, tedy i středový úhel příslušící tětivě AB bude stejný, a proto $|\sphericalangle AS_lB| = 2\varphi$. Pro $B = C$ tvrzení platí triviálně, budeme se více zabývat možností $B \neq C$.

Podívejme se na úhly $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ACB$. $\sphericalangle ABC$ je úhel úsekový k tětivě AB kružnice k, tedy jeho velikost je rovna polovině velikosti příslušného středového úhlu, tedy $|\sphericalangle ABC| = \varphi$. $\sphericalangle ACB$ je úhel obvodový k tětivě AB kružnice l, jeho velikost je rovna polovině velikosti příslušného středového úhlu, získáme $|\sphericalangle ACB| = \varphi$. Tedy $|\sphericalangle ACB| = \varphi = |\sphericalangle ACB|$, a tedy $\triangle ABC$ je rovnoramenný s rameny AB, AC, a pro takový trojúhelník platí $|AB| = |AC|$.

Úloha 4.3. Máme zadané tři kružnice k, l, m se středy K, L, M a poloměry r_1, r_2, r_3 tak, že každá dvojice spolu má vnější dotyk. Označme bod dotyku kružnic k a l jako A, l a m jako B, m a k jako C. Ukažte, že kolmice na přímku KL v bodě A, osa úhlu KLM a osa úsečky BC se protnou v jednom bodě.

Řešení.



Označme si střed kružnice vepsané trojúhelníku KLM jako S. Osa úhlu $\sphericalangle KLM$ prochází bodem S z definice.

Ukažme, že osa úsečky BC je stejná jako osa úhlu $\sphericalangle KML$. Označme S_{BC} střed úsečky BC. Trojúhelníky $MS_{BC}B$ a $MS_{BC}C$ jsou shodné podle věty *sss*. Úhly $\sphericalangle BMS_{BC}$ a $\sphericalangle CMS_{BC}$ jsou shodné a proto přímka MS_{BC} je osa úhlu $\sphericalangle BMC = \sphericalangle KML$. Ze shodnosti trojúhelníků výše také plyne, že $|\sphericalangle MS_{BC}B| = |\sphericalangle MS_{BC}C|$. Jelikož úhly $\sphericalangle MS_{BC}B$ a $\sphericalangle MS_{BC}C$ jsou vedlejší, pak $180° = \sphericalangle MS_{BC}B + \sphericalangle MS_{BC}C = 2\sphericalangle MS_{BC}B \Rightarrow \sphericalangle MS_{BC}B = 90°$. Tedy přímka MS_{BC} je kolmá na BC a zároveň ji protíná ve středu úsečky, proto je její osou. Vidíme, že přímka MC je jak osou úsečky BC, tak osou úhlu $\sphericalangle KML$.

Zbývá ukázat, že přímka SA je kolmá na KL (a tedy je kolmicí v bodě A procházející bodem S). Všimněme si dvojic trojúhelníků $\triangle KAS$, $\triangle KCS$; $\triangle LAS$, $\triangle LBS$ a $\triangle MBS$, $\triangle MCS$. Tyto trojúhelníky jsou shodné podle věty *sus*, protože jednu stranu sdílí, druhá strana tvoří poloměr stejné kružnice a úhly se shodují, protože KS (respektive LS a MS) tvoří osu úhlu $\sphericalangle LKM$ (respektive $\sphericalangle KLM$ a $\sphericalangle KML$). Dostáváme tedy shodné úhly $\sphericalangle SAK$ a $\sphericalangle SCK$ (respektive $\sphericalangle SAL$, $\sphericalangle SBL$ a $\sphericalangle SBM$, $\sphericalangle SCM$). Všimněme si vedlejších úhlů u vrcholů A, B a C. Dosaďme:

$$
\begin{aligned}
180° &= |\sphericalangle KCS| + |\sphericalangle MCS| \\
&= |\sphericalangle KAS| + |\sphericalangle MBS| \\
&= 180° - |\sphericalangle LAS| + \pi - |\sphericalangle LBS| \\
&= 360° - 2|\sphericalangle LAS|.
\end{aligned}
$$

Tedy $|\sphericalangle LAS| = 90° a \text{KL} \perp SA$.

Jiné řešení: Stejně jako v minulém řešení ukážeme, že osa úhlu $\sphericalangle KLM$ a osa úsečky BC prochází vepsištěm S. Označme body A', B' a C' body dotyku kružnice vepsané se stranami KL, ML a MK. Trojúhelníky $\triangle KA'S$ a $\triangle KC'S$ jsou podobné podle věty *uu* (úhly $\sphericalangle KA'S$ a $\sphericalangle KC'S$ jsou pravé, protože KL a KM jsou tečny a KS je osa úhlu $\sphericalangle LKM$). Jelikož $|SA'| = |SC'|$ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle\ KLM$, tak jsou trojúhelníky $\triangle KA'S$ a $\triangle KC'S$ dokonce shodné podle věty *usu*. Tím dostáváme $|KA'| = |KC'|$

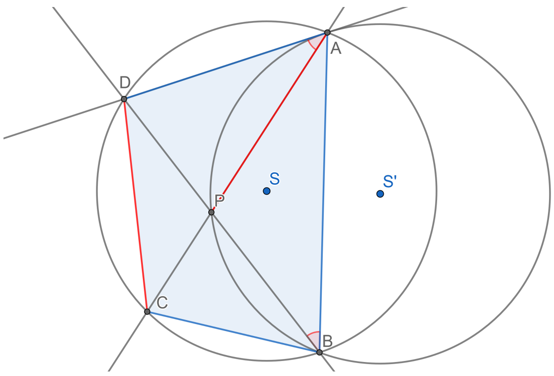
a analogicky dostaneme $|LA'| = |LB'|$ a $|MB'| = |MC'|$. Pro body čárkované i nečárkované dostáváme soustavu lineárních rovnic: $|KL| = |KA| + |LA|, |LM| = |LB| + |MB| = |LA| + |MB|, |MK| = |MC| + |KC| = |MB| + |KA|$ a $|KL| = |KA'| + |LA'|, |LM| = |LB'| + |MB'| = |LA'| + |MB'|, |MK| = |MC'| + |KC'| = |MB'| + |KA|'$. Řešení těchto soustav je

$$(|LA|, |KA|, |MB|) = (|LA'|, |KA'|, |MB'|)$$
$$= (\frac{|KL| + |LM| - |KM|}{2}, \frac{|KL| + |KM| - |LM|}{2}, \frac{|KM| + |LM| - |KL|}{2})$$

Jelikož vzdálenost bodu A i A' je stejná od bodu L a body A i A' leží uvnitř úsečky KL, pak $A = A'$. (Totéž platí pro body B, B' a C, C'.) Jelikož $SA = SA'$, pak $SA \perp KL$ a všechny tři přímky se protínají v bodě S.

Úloha 4.4. Jsou dány dvě kružnice k, k' se středy S, S', osově souměrné podle společné tětivy AB, přičemž $|SS'| < r = r'$. Dále je na kružnici k dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož průsečík úhlopříček P leží na kružnici k' a strana AD je tečna ke kružnici k'. Dokažte rovnost $|CD| = |AP|$.

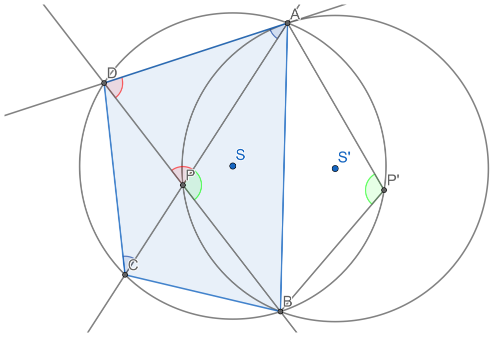
Řešení. Pro obě řešení poznamenejme, že bod P leží na kratším oblouku AB, protože leží uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí k.



Nejdříve ukážeme, že $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle PBA|$. Úhly $\sphericalangle PAD$ a $\sphericalangle CAD$ jsou totožné. Úhel $\sphericalangle PAD$ je úsekový úhel k úhlu $\sphericalangle AS'P$ a úhel $\sphericalangle ABP$ je obvodový k úhlu $\sphericalangle AS'P$. Můžeme tedy psát rovnost $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle PAD| = \frac{|\sphericalangle AS'P|}{2} = |\sphericalangle ABP|$.

Ze shodnosti obvodových úhlů $\sphericalangle CAD$ a $\sphericalangle ABP$ plyne shodnost středových úhlů $|\sphericalangle CSD| = 2|\sphericalangle CAD| = 2|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle AS'P|$. Jelikož kružnice k a k' mají stejný poloměr, tak $|S'A| = |S'P| = |SC| = |SD| = r = r'$. Proto trojúhelníky $\triangle AS'P$ a $\triangle CSD$ jsou shodné podle věty *sus*, a tedy $|CD| = |AP|$. (V případě, že úhel $\sphericalangle CSD$ je přímý, pak je úhel $|\sphericalangle CAD|$ pravý a rovnost plyne z Thaletovy věty a shodnosti kružnic – jak $|CD|$, tak $|AB|$ tvoří průměr jedné z kružnic.)

Jiné řešení:



Tvrzení dokážeme pomocí rovnoramenných trojúhelníků $\triangle DAP$ a $\triangle CDA$ (se základnami DP a CA). Nejdříve ukážeme, že trojúhelník DAP je rovnoramenný.

Uvažme obraz bodu P v osové souměrnosti podle osy AB. Protože kružnice k a k' jsou osově souměrné podle osy AB, tak se bod P' (obraz bodu P) bude nacházet na kružnici k. Jelikož čtyřúhelník $AP'BD$ je tětivový, tak $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AP'B| = 180° - |\sphericalangle ABD|$. Jelikož $\sphericalangle APB$ a $\sphericalangle APD$ jsou vedlejší úhly, tak $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ADP|$.

Nyní ukažme, že trojúhelník $\triangle\ ADC$ je rovnoramenný. Úhly $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle ABD$ jsou obvodové (vzhledem ke kružnici k). A úhel $\sphericalangle CAD$ je úsekový.

Dostáváme tedy rovnost $|PA| = |DA| = |CD|$ a tvrzení je dokázáno.

Úloha 4.A. V rovině ρ je dán trojúhelník ABC. Popiš množinu bodů V v prostoru takových, že mají od bodů A, B, C stejnou vzdálenost (tj. $|AV| = |BV| = |CV|$).

Řešení. Označme X množinu takových bodů, které splňují $|AV| = |BV| = |CV|$ a p přímku kolmou na rovinu ρ a procházející středem S kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pro rovnost $X = p$ musíme ukázat:

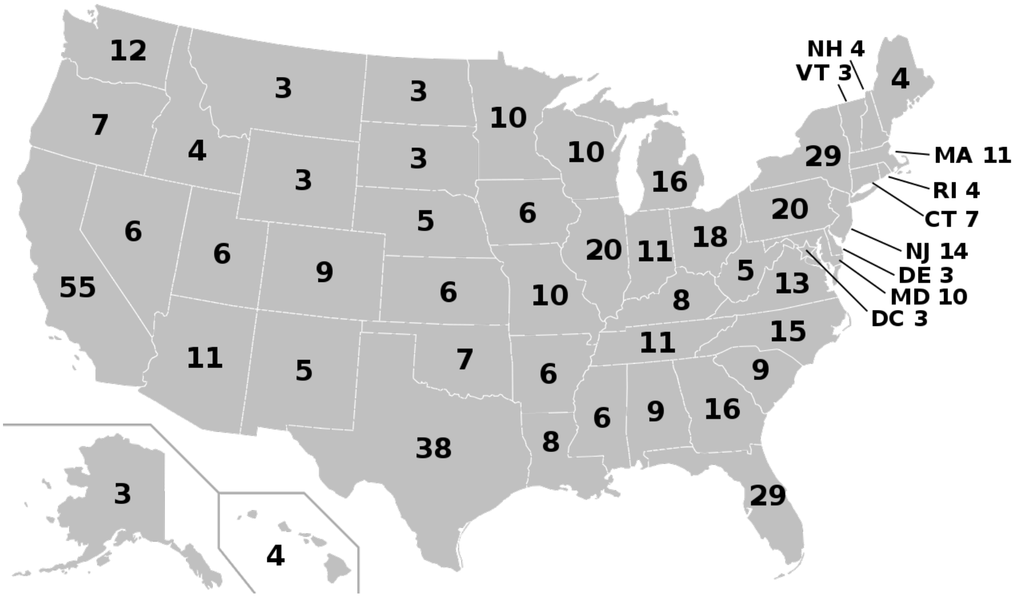
1. $X \subseteq p$
2. $X \supseteq p$

1\. Označme σ_{KL} rovinu souměrnosti úsečky KL (rovina kolmá na úsečku procházející jejím středem). Protože σ_{AB} i σ_{BC} jsou kolmé na rovinu ρ, je na ni kolmá i jejich průsečnice. A protože zjevně střed S kružnice opsané patří do $\sigma_{AB} \cap \sigma_{BC}$ (splňuje $|AS| = |BS|$ i $|BS| = |CS|$), dostáváme $\sigma_{AB} \cap \sigma_{BC} = p$. Pro každý V takový, že $|AV| = |BV| = |CV|$, platí $V \in \sigma_{AB}$ (neboť $|AV| = |BV|$) a $V \in \sigma_{BC}$ (neboť $|BV| = |CV|$), a tedy $V \in p$ (čili $X \subseteq p$).

2\. Je dán $P \in p$. Trojúhelníky ASP, BSP, CSP jsou shodné podle *sus*, tudíž platí $|AP| = |BP| = |CP|$ a tedy $P \in X$.

Úloha 4.B. Šanganjosechitinské prezidentské volby fungují podobně jako ty americké. Vyhraje ten, kdo získá alespoň 270 volitelů. Každému z 51 okresů je přiřazen určitý počet volitelů (viz mapa). Všechny volitele z okresu získá kandidát, který v daném okresu získá nejvíce hlasů. Každý volitel reprezentuje přesně milion voličů (a všichni volí).

Plukovník Motýl vidí do budoucnosti a ví, že v žádném okresu nenastane remíza (stejný počet hlasů u prvních dvou kandidátů) a že dostane přesně milion hlasů (ve všech státech dohromady). Kolik nejméně musí mít protivníků, aby mohl vyhrát volby?



Řešení. MYŠLENKA: To, že nám jde o **nejmenší** počet protivníků, znamená, že hlasy, které Motýl získal, máme rozdělit mezi jednotlivé okresy tak, aby volby vyhrál co nejtěsněji. Pokud by získal nějaký hlas v okrese, který nevyhraje, byl by mu takový hlas k ničemu. Mohli bychom mu ho tedy vzít a výsledek by byl těsnější. Klidně tedy můžeme předpokládat, že všechny hlasy získal pouze v okresech, které vyhrál. V nejtěsnějším případě získal přesně 270 volitelů. Je třeba ověřit, že existuje skupina okresů, jejichž součet volitelů je přesně 270. Ověření není těžké, stačí vzít např. 11 okresů s nejvíce voliteli. Tyto státy tedy Motýl vyhrál.

Nejslabším Motýlovým místem je okres, kde získá nejmenší procento hlasů. Toto nejmenší procento chceme maximalizovat a to uděláme tak, že jeho hlasy rozdělíme rovnoměrně mezi všechny voliče těchto 11 okresů. Protože jich má milion a voličů je v nich dohromady 270 milionů, získá v každém z těchto okresů $\frac{1}{270}$ hlasů. To, jak dobrý je to výsledek, záleží na tom, kolik hlasů získal ten z jeho soupeřů, který jich získal nejvíce. Tuto hodnotu tedy chceme minimalizovat a to uděláme tak, že i hlasy mezi soupeře rozdělíme rovnoměrně. Zbylých $\frac{269}{270}$ tedy musíme rozdělit na tolik dílů, aby byl jeden díl menší než $\frac{1}{270}$. Z toho už je vidět, že správná odpověď je 270 soupeřů.

DŮKAZ: Nyní to dokážu. Hledanou hodnotu označím x. Nejprve ukážu, že $x \leq 270$, neboli že s 270 soupeři může vyhrát. K tomu stačí najít konkrétní rozdělení hlasů takové, že vyhraje. Ukážu ho v tabulce:

	Počet volitelů	Počet hlasů Motýla	Součet ostatních	Každý z 269 protivníků	270. protivník	Vítěz
	55	203708	54796292	203325	101867	motýl
	38	140740	37859260	140479	70409	motýl
	29	107407	28892593	107208	53641	motýl
	29	107407	28892593	107208	53641	motýl
	20	74074	19925926	73936	37142	motýl
	20	74074	19925926	73936	37142	motýl
	18	66666	17933334	66542	33536	motýl
	16	59259	15940741	59149	29660	motýl
	16	59259	15940741	59149	29660	motýl
	15	55555	14944445	55452	27857	motýl
	14	51851	13948149	51755	26054	motýl
Součty	270	1000000	269000000			

.

Jsou-li takto rozdělené hlasy v 11 největších okresech, vyhraje, ať už jsou v ostatních okresech hlasy rozděleny jakkoli (on tam žádný nemá).

Nyní ukážu, že $x \geq 270$, neboli že s méně soupeři nemůže vyhrát. Pro spor předpokládám, že takové rozdělení hlasů existuje. Pokud by existovalo, tak jistě existuje i rozdělení s 269 protivníky (další protivníci žádné hlasy nedostanou). Počet volitelů, které získal, označím n, přičemž $n \geq 270$. Průměrně ho tedy jeden volitel stál $10^6/n$ hlasů. V nějakém okrese tedy určitě získal nejvýše $\lfloor k/n \rfloor$ hlasů, kde k je počet voličů daného okresu (protože počet voličů je počet volitelů krát milion). Zbylých hlasů v daném okrese pak je alespoň $k - \lfloor k/n \rfloor$. Průměrný protivník pak v daném okrese získal $(k - \lfloor k/n \rfloor)/269$. Alespoň jeden z nich jich tedy získal alespoň $\lceil (k - \lfloor k/n \rfloor)/269 \rceil$.

Nyní ukážu, že $\lceil (k - \lfloor k/n \rfloor)/269 \rceil \geq \lfloor k/n \rfloor$.

$\lceil (k - \lfloor k/n \rfloor)/269 \rceil \geq (k - \lfloor k/n \rfloor)/269 = \frac{k}{269} - \frac{\lfloor k/n \rfloor}{269} \geq \frac{k}{269} - \frac{k/n}{269} = \frac{k(1-1/n)}{269} \geq \frac{k(1-1/270)}{269} = \frac{k(269/270)}{269} = \frac{k}{270} \geq \frac{k}{n} \geq \lfloor k/n \rfloor$. Daný okres tedy Motýl nemohl získat, a to je spor. Tím je důkaz hotov.

Úloha 4.C. Kladná reálná čísla x, y, $x > y$ vyhovují rovnici

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3y - x^2y^2 + xy^3} = 6.$$

Určete hodnotu $\frac{x+y}{x-y}$.

Řešení. Zadání upravme do tvaru

$$x^4 - 6x^3y + 6x^2y^2 - 6xy^3 + y^4 = 0.$$

Všimněme si, že výraz na levé straně trochu vypadá jako rozvinuté $(x+y)^4$, případně $(x-y)^4$. Podívejme se na to a zapišme si rozdíly:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$$

Platí tedy, že výraz na levé straně se rovná podle první rovnosti $(x+y)^4 - 10x^3y - 10xy^3$ a podle druhé $(x-y)^4 - 2x^3y - 2xy^3$. Oba se ale rovnají nule, tedy platí

$$\frac{(x+y)^4}{(x-y)^4} = \frac{10x^3y + 10xy^3}{2x^3y + 2xy^3} = 5.$$

Řešením je tedy $\sqrt[4]{5}$, neboť $\frac{x+y}{x-y}$ je jistě pro $x > y > 0$ kladné, proto $-\sqrt[4]{5}$ řešením není.

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $x^3 - y^3 = 11^z$ (kde x, y, z jsou celá čísla).

Řešení. Ukážeme, že jediná řešení jsou tvaru

$$(x, y, z) \in \{(11^c, 0, 3c), (0, -11^c, 3c) | c \in \mathbb{N}_0\}.$$

Jistě pro řešení rovnice musí platit $z \geq 0$, jinak by číslo na pravé straně nebylo celé. Dále budeme postupovat tak, že ukážeme, že jediné *nesoudělné* dvojice x, y vyhovující naší rovnici jsou $(x, y) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$. Nejdříve si ale vysvětleme, proč nám tato informace stačí.

Nechť x, y, z je nějaké řešení naší rovnice a předpokládejme, že x, y jsou soudělná. Označme jejich největšího společného dělitele jako d; tedy $x = da, y = db$ kde a, b jsou nesoudělná celá čísla. Potom $d^3(a^3 - b^3) = 11^z$. Dle předpokladu platí $d > 1$, tedy rovněž $z > 0$. Jelikož rozklad přirozeného čísla na součin prvočísel je jednoznačný (až na pořadí činitelů), vidíme, že $d = 11^k$ pro nějaké přirozené číslo k. Tudíž trojice $(a, b, z - 3k)$ je rovněž řešením naší rovnice. Naopak, buď (x, y, z) nějaké řešení, kde x, y jsou nesoudělná. Potom pro každé přirozené k dostáváme, že $(11^k x, 11^k y, z + 3k)$ je též řešení. Vidíme tedy, že pokud určíme řešení rovnice se nesoudělnými x a y, dostaneme z nich již všechna ostatní řešení.

Hledejme tedy řešení s nesoudělnými x a y! Vzpomeňme si, že $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Můžeme si hned rozmyslet, že pokud $x - y = 1$, po dosazení dostáváme $x^2 + xy + y^2 = (y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 3y^2 + 3y + 1$. Pokud $z = 0$, pravá strana rovnice je rovna jedné, tedy opravdu $x - y = 1$ a navíc podle předchozího výpočtu $3y^2 + 3y + 1 = 1$, což můžeme upravit na rovnici $y^2 + y = 0$. Ta má řešení $y = 0, y = -1$, tedy dostáváme řešení $(1, 0, 0), (0, -1, 0)$ a z nich násobením mocninou jedenáctky všechna řešení uvedená na začátku.

Předpokládejme dále $z > 0$. Navíc můžeme předpokládat, že nějaké z čísel x, y je v absolutní hodnotě větší než 1. Potom však $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x + y)^2 + y^2)$ je číslo větší než 1, je to tedy mocnina jedenáctky; tedy dává po dělení jedenácti zbytek nula. Toho dále využijeme a rozebereme dvě možné situace: $x - y = 1$ a $11 | x - y$.

Pokud $x - y = 1$, podle předchozího máme $3y^2 + 3y + 1 \equiv 0 \pmod{11}$. Tedy $3y(y + 1) \equiv -1 \equiv 21 \pmod{11}$, a proto $y(y + 1) \equiv 7 \pmod{11}$. Ale můžeme si ověřit, že tuto rovnost žádné y nesplní: pro y od 0 do 11 nabývá výraz $y(y + 1)$ modulo 11 hodnot $0, 2, 6, 1, 9, 8, 9, 1, 6, 2, 0$. V tomto případě tedy žádná další řešení nemáme.

Pokud je výraz $x - y$ dělitelný jedenácti, máme $x \equiv y \pmod{11}$. Pak ale $0 \equiv x^2 + xy + y^2 \equiv 3x^2$, a tedy jedenáctka dělí x a y. My však předpokládáme, že tato čísla jsou nesoudělná, což je spor. Našli jsme tedy řešení všechna.