Řešení 3. série

Catalanova čísla

Úloha 3.1. Oblíbená hra hostinského a Elvíry vypadala takto: Elvíra se nacházela na ose přirozených čísel na čísle 1. Hostinský mezitím házel kostkou. Pokaždé když mu padlo 6, Elvíra se posunula o jedno doprava (tj. z čísla n na číslo $n+1$), když mu padlo 1, posunula se o jedno doleva, tj. z n na $n-1$ (pokud nestála na 1) a když padlo cokoliv jiného, zůstala na místě. Pokaždé, když se pohnula, hostinský si na papírek napsal + či -, podle druhu pohybu. Kolik různých posloupností znamének mohl mít hostinský na papírku, pokud hodil desetkrát a Elvíra začala i skončila na čísle 1?

Řešení. První si všimneme, že počet posunů, které Elvíra vykonala, je sudý. Toto plyne ze skutečnosti, že se celkově musí posunout o stejný počet pohybů doleva jako doprava, jinak by skončila jinde než na počáteční poloze 1. Protože se Elvíra pohybuje na ose přirozených čísel, nemůže nikdy zajít "pod"číslo 1, tedy například první krok, který učiní, nesmí být "$-$".

Kroků je nejvýše 10, tedy se mohla posunout 0krát, 2krát, 4krát, 6krát, 8krát a 10krát.

Pokud vykonala například 2 pohyby pak první musel být + a druhý pak nutně $-$. To kvůli výše zmíněnému pozorování, že nemohla uniknout z přirozených čísel. Tedy možnost je jedna. Pokud vykonala 4 pohyby, je možností více. Opět musí začít +, ale následně se může vzdálit nebo přiblížit hodnotě 1. Možnosti jsou tedy dvě: $++--$ a $+-+-$. Naopak například $+--+$ není možné, protože by se třetím krokem dostala mimo přirozená čísla.

Povšiměme si, že kdyby se + interpretovalo jako krok doprava a $-$ jako krok nahoru na čtverečkovém papíře, odpovídaly by posloupnosti hostinského přesně takovým cestám, které se pohybují pod diagonálou. Vyskytovat se pod diagnálou totiž přesně odpovídá tomu udělat méně kroků nahoru než doprava a to zas odpovídá tomu, že Elvíra nevyskočila z přirozených čísel. Pro každý počet kroků $2k$ je proto přesně k-té Catalanovo číslo možností, co mohl mít hodspodský na papírku.

Celkový počet získáme sečtením těchto hodnot, tedy:

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 1 + 1 + 2 + 5 + 14 + 42 = 65.$$

Hostinský tedy mohl mít na papírku jednu z 65 různých posloupností pohybů.

Úloha 3.2. Aritmetický výraz obsahující kulaté závorky, odčítání, dělení a čísla od 1 do 9 nazveme maximální, pokud obsahuje maximální možný počet závorek, ale neobsahuje závorky kolem samotného čísla nebo dvoje závorky kolem jedné operace. Například $(3-9)$, $((4/9)-5)$ jsou maximální, ale $3-9$, $(4/9-5)$ a $(5-(6))$ maximální nejsou. Kolik existuje maximálních výrazů obsahujících 777 znaků?

Řešení. Označme n počet čísel, které bude obsahovat náš maximální výraz. Jelikož matematickou operaci můžeme dát mezi každá dvě čísla, tak použijeme $n-1$ operací.

V každém takovém výrazu navíc platí, že ke každé operaci bude přiřazena jedna dvojice závorek, použijeme jich proto $2(n-1)$. Pro výraz obsahující 777 znaků platí:

$$n + (n-1) + 2(n-1) = 777$$

$$n = 195$$

Výraz tedy musí obsahovat 195 čísel, 194 operací a 194 dvojic závorek. Podle zadání vybíráme čísla z intervalu od 1 do 9, dostáváme 9^{195} různých kombinací. Dále používáme dva druhy znamének, proto jejich různých kombinací je 2^{194}.

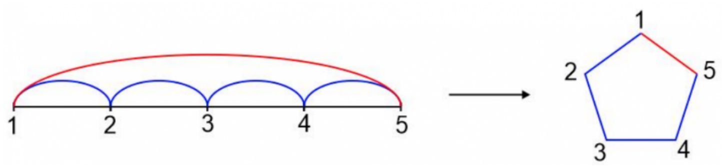
Nyní už jen zjistíme, kolika způsoby mohou být zapsány závorky. Každá dvojice závorek patří k jedné operaci - pokud známe pouze levé závorky, jsme schopní jednoznačně zapsat ty pravé. Každou možnost můžeme přiřadit k jedné Dyckově cestě (a naopak) - cesty doprava reprezentují levé závorky, cesty nahoru operace. Máme C_{194} způsobů, jak závorky zapsat.

Maximálních výrazů obsahujících 777 znaků je $9^{195} \cdot 2^{194} \cdot C_{194}$.

Úloha 3.3. Hostinský nakreslil na papír N stanic (bodů) na centrální lince (přímce) s pravidelnými rozestupy 1. Následně do obrázku dokreslil několik úseček (bod není úsečka) tak, že každá začíná a končí v některých vyznačených bodech. Navíc pro každé dvě úsečky a, b platilo, že pokud je jejich průnik nějaká úsečka c, pak $a = c$ nebo $b = c$. Kolika způsoby mohl hostinský nakreslit úsečky v závislosti na N, pokud navíc víte, že jich nakreslil největší možný počet pro dané N?

Řešení. Převedeme problém hostinského na triangulace pravidelného N-úhelníka.

Zřejmě hostinský nakreslil úsečku spojující všechny vrcholy a také všechny jednotkové úsečky. Nechť nyní $N \geq 3$. Pak si tyto úsečky můžeme představit jako pravidelný N-úhelník, kde každá již zmíněná úsečka představuje hranu tohoto N-úhelníka.



To, že libovolné dvě úsečky mají průnik buď jednobodový, anebo celou zadanou úsečku přesně znamená, že hledáme nekřížející se úhlopříčky N-úhelníka. Zároveň víme, že pro každou triangulaci n-úhelníka platí, že obsahuje největší možný počet nekřížících se úhlopříček, a tedy máme bijekci mezi možnými rozděleními úseček a všemi trangulacemi pravidelného N-úhelníka.

Nyní tedy stačí ověřit, jak to vypadá pro $N < 3$. Zřejmě pro tato N měl hostinský právě jednu možnost.

Hostinský měl tedy jednu možnost pro $N = 1, N = 2$ a dále C_{N-2} pro každé $N \geq 3$.

Úloha 3.4. Krystal je trojúhelníková mřížka jako na obrázku, kde nezávisle na jeho výšce N má horní a spodní strana délku 3. Krystal je vyplněn barevnými jadérky ve tvaru kosočtverců o velikosti dvou trojúhelníků. Jadérka mají tři různé barvy. Každý trojúhelník je součástí právě jednoho jadérka. Navíc každá dvě jadérka, která spolu sdílí hranu, mají stejnou barvu, právě když mají stejnou orientaci (tj. jejich hroty míří stejným směrem). Monokrystalem pak označíme libovolnou souvislou plochu jadérek stejné barvy, která již nesousedí s dalšími jadérky této barvy. Kolik různých tvarů a umístění může mít monokrystal o výšce N v krystalu o výšce N?

Řešení. Označme jadérka jako svislá, levá a pravá. Každý typ jadérka obsahuje jeden trojúhelník směřující špičkou nahoru. Svislá mají druhý trojúhelník na jeho spodní straně, levá na levé a pravá na jeho pravé straně. Číslo N je ze zadání sudé, proto můžeme definovat $N = 2n$. Rozdělme krystal na $2n$ řad číslovaných 1 až $2n$ odspodu. Řekneme, že svislé jadérko se nachází v i-té řadě, pokud se v i-té řadě nachází jeho spodní trojúhelník.

Pro libovolné rozdělení a obarvení jadérek můžeme změnit obarvení tak, že svislá jadérka obarvíme červeně, levá modře a pravá zeleně. Zřejmě bude výsledný krystal stále splňovat podmínky zadání a tvar dílčích monokrystalů zůstane nezměněn.

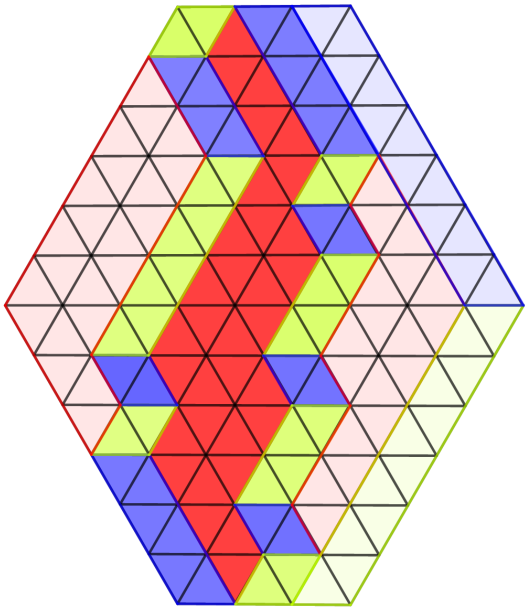
Nejdříve ukážeme, že každý monokrystal výšky $2n$ je složen ze svislých jadérek. Pro spor nechť je bez újmy na obecnosti složen z jadérek levých. Poté musí obsahovat zejména levé jadérko v první řadě. Ovšem trojúhelník bezprostředně vlevo od tohoto jadérka (pokud existuje) musí být také součástí levého jadérka. Tedy všechna levá jadérka v první řadě tvoří souvislou plochu počínaje nejlevějším trojúhelníkem první řady. Zaměřme se na druhou řadu. Podle předpokladu se v ní nachází levé jadérko, které sousedí s některým levým jadérkem v první řadě. Podobně jako v první řadě i nyní musí být všechny trojúhelníky nalevo od tohoto jadérka součástí levého jadérka (nemůžou být součástí svislého, neboť trojúhelník pod ním je součástí levého). Opakováním této úvahy (indukcí) zjistíme, že ve všech řadách 1 až $n+1$ je nejlevější trojúhelník na řádku součástí levého jadérka. To ovšem v řadě $n+1$ není možné, protože nejlevější trojúhelník v ní již nemá levého souseda, který by s ním byl v jadérku. Tedy získáváme spor s předpokladem, že existuje monokrystal výšky $2n$ složený z levých jadérek.

Každý monokrystal výšky $2n$ se dotýká horní i dolní hrany celého krystalu. Nyní ukážeme, že plocha každého takového monokrystalu M je zleva i zprava ohraničena cestami složenými z $2n$ hran trojúhelníků, které obsahují v každém řádku právě jednu hranu. Kdyby monokrystal ohraničovala cesta, která některým řádkem prochází dvakrát, pak by obsahovala levou i pravou hranu některého trojúhelníku, který není součástí monokrystalu. Označme jej s. Pak ovšem trojúhelník s musí být součástí nějakého svislého jadérka (jinak by bylo jeho jadérko půleno hraniční cestou monokrystalu M). Protože ale sousedí s monokrystalem složeným ze svislých jadérek, musí být jeho součástí, což je spor.

Nyní sporem dokážeme, že monokrystal M obsahuje všechny trojúhelníky mezi jeho levou a pravou hraniční cestou. Předpokládejme tedy, že nějaký trojúhelník v oblasti mezi hraničními cestami, který není součástí monokrystalu, existuje. Uvažme nejvýše se nacházející z těchto trojúhelníků (libovolný z nich) a označme jej t. Jistě směřuje vzhůru, protože v opačném případě by trojúhelník nad ním nemohl být součástí svislého jadérka, a tedy ani monokrystalu. Ze stejného důvodu jsou ale i trojúhelníky nalevo a napravo od t součástí monokrystalu. Proto je t součástí svislého jadérka a to je spor, protože pak by musel být součástí monokrystalu.

Důsledkem pak je, že M obsahuje právě jedno svislé jadérko v řadě 1 a v řadě $2n-1$.

Nyní konečně rozeberme všechny možnosti umístění monokrystalu. Uvažujme libovolný monokrystal M, který obsahuje nejlevější trojúhelník první řady. Pak je plocha tohoto monokrystalu ohraničena zleva a zprava cestami, které se dotýkají na spodní a horní hraně krystalu. Pokud by levá cesta nesplývala s levým okrajem celého krystalu, pak by nutně nejlevější trojúhelník v nejnižším řádku, kde se cesta a okraj neshodují, musel být součástí svislého jadérka, které není součástí monokrystalu M. Jako v předchozích případech pak musí být součástí svislého jadérka, tedy získáváme spor a levá cesta musí splývat s levým okrajem celého krystalu. Naopak pravá hraniční cesta může být libovolná cesta, která projde každým řádkem právě jednou a na horní a spodní hraně celého krystalu se dotýká levého okraje. Každý takto ohraničený svislý monokrystal lze totiž doplnit jadérky tak,



Obrázek 1: Červený monokrystal lze zleva a zprava lemovat levými (modré) a pravými (zelené) jadérky a pomocí svislých (červené) jadérek doplnit do rovnoběžnostěnu. Zbylý pruh vpravo (či potenciálně vlevo) je vyplněn levými a pravými jadérky.

aby se nedotýkal jiných svislých jadérek – viz obrázek. Počet monokrystalů výšky $2n$ obsahujících levý trojúhelník v první řadě je tedy stejný jako počet krokových cest na mřížce o délce hrany $n-1$, tedy $\binom{2n-2}{n-1}$. Podobně ukážeme, že monokrystalů výšky $2n$ obsahujících nejpravější trojúhelník je také $\binom{2n-2}{n-1}$.

Navíc jsme ukázali, že pokud monokrystal obsahuje nejlevější trojúhelník první řady, pak obsahuje nejlevější trojúhelník řady poslední. Ze symetrie celého krystalu proto vyplývá, že tato implikace platí i obráceně, tedy monokrystal výšky $2n$ obsahuje nejlevější trojúhelník v první řadě, právě když obsahuje nejlevější trojúhelník v poslední řadě. Zejména takový monokrystal, který obsahuje druhý nejlevější trojúhelník směřující špičkou dolů v první řadě, musí obsahovat buď druhý, nebo třetí trojúhelník směřující špičkou nahoru v řadě poslední. Pokud by ovšem obsahoval třetí trojúhelník, pak by oblast nalevo od levé dělící cesty obsahovala lichý počet trojúhelníků, tedy nešla by rozdělit na jadérka. Proto se spodní a vrchní trojúhelník monokrystalu výšky $2n$ vždy nachází ve stejném sloupci. Stačí nám tedy spočítat počet takových dvojic cest, které se potkají pouze na dolní a horní hraně celého krystalu a svírají mezi sebou druhý trojúhelník v prvním i posledním řádku (z obrázku je opět zřejmé, že každý takový monokrystal lze obklopit jadérky vhodným způsobem).

V každém řádku se obě cesty mohou vydat doprava či doleva. Pokud se vydají opačnými směry, tak se vzdálí či přiblíží. Pokud se obě vydají stejnými směry, zůstanou od sebe ve stejné vzdálenosti. Pokud v patrech 1 až i přiblížily tolikrát, kolikrát se oddálily, pak se v patře i dotknou. Naopak pokud se v každé posloupnosti pater 1 až i vzdálili vícekrát než přiblížili, nikdy se nedotknou. Dohromady je $2n$ pater, v prvním se vzdálí a v posledním přiblíží. Následně mohou provést libovolný počet přiblížení a vzdálení za předpokladu, že se nikdy nedotknou dříve než v patře $2n$ a celkový počet vzdálení bude stejný jako počet přiblížení. V prvním patře se cesty vždy vzdálí a v posledním přiblíží. Označme proto k počet vzdálení v patrech 2 až $2n-1$. Hledáme proto počet možných posloupností celkem $2k$ kroků, kde právě v k se vzdálí a v k se přiblíží. Navíc počet přiblížení nesmí být v žádném okamžiku větší než počet oddálení. Vidíme tedy korespondenci s cestami pod diagonálou na tabulce $k \times k$, kde oddálení odpovídá kroku vpravo a přiblížení nahoru. Je jich proto C_k. Ve zbylých $2n-2-2k$ řádcích, kde obě cesty obsahují rovnoběžné hrany, se mohou cesty libovolně pohybovat doleva a doprava. Musí ovšem platit, že počet kroků doprava je dohromady stejný jako počet kroků doleva – to je $n-n-k$ kroků doleva a doprava. Tedy je $\binom{2n-2-2k}{n-1-k}$ možností, jak vybrat, které z nerozbíhajících se kroků budou doleva (zbylé budou doprava), a konečně je $\binom{2n-2}{k}$ možností, jak rozhodnout, které kroky jsou vzdalující se (resp. přibližující) a které jsou rovnoběžné. Pro dané k je proto $C_k\binom{2n-2-2k}{n-1-k}\binom{2n-2}{k}$ možností, jak cesty vybrat a celkem je tedy takových párů cest

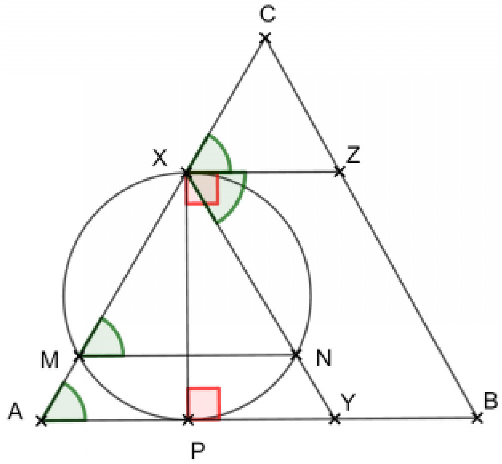
$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \binom{2n-2-2k}{n-1-k}\binom{2n-2}{k}.$$

Situace je opět symetrická pro monokrystaly obsahující třetí trojúhelník první řady. Celkem je proto krystalů

$$2\left(\binom{2n-2}{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \binom{2n-2-2k}{n-1-k}\binom{2n-2}{k}\right).$$

Úloha 3.A. Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A. Zvolme na straně AC bod X a veďme jím přímku p, která bude kolmá na přímku AB. Průsečík p a AB označme P. Na přímce AB uvažme bod Y takový, že $|\sphericalangle CXY| = 2\alpha$. Nakonec uvažme Fofovu (Thaletovu) kružnici k nad průměrem XP. Přímky AC a XY protínají k po řadě v bodech M, N různých od X. Dokažte, že MN je rovnoběžná s AB.

Řešení. Uvažme tečnu ke kružnici k v bodě X a označme Z průsečík této tečny s přímkou BC. Pak přímka XZ je kolmá na XP, která je kolmá na AB, což dohromady dává, že $XZ||AB$. Úhly $\sphericalangle CXZ$ a $\sphericalangle CAB$ jsou tedy souhlasné, takže $|\sphericalangle CXZ| = \alpha$. Jelikož $|\sphericalangle CXY| = 2\alpha$, tak dostáváme, že $|\sphericalangle YXZ| = \alpha$. Ale úhel YXZ je úsekový příslušící stejnému oblouku jako obvodový úhel XMN. Proto $|\sphericalangle XMN| = \alpha$ a XMN a CAB jsou souhlasné úhly. To ale znemaná, že přímky AB a MN jsou rovnoběžné, což bylo třeba dokázat.



Úloha 3.B. Nechť n je přirozené číslo. Ukažte, že rovnice $x^2 - y^2 = n$ má celočíselná řešení x, y, právě když n nedává po dělení čtyřmi zbytek 2.

Řešení. Nejdříve ukážeme, že pro n, které po dělení čtyřmi dává zbytek 2, rovnice $x^2 - y^2 = n$ nemá řešení. Zjistíme, jaký zbytek dává druhá mocnina nějakého čísla m po dělení čtyřmi. Pokud je m sudé, pak $m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ je dělitelné čtyřmi. Pokud m je liché, pak $m^2 = (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1$ dává po dělení čtyřmi zbytek 1. Rozdíl druhých mocnin může tedy dát zbytek po dělení 0, 1, nebo 3, ale nikoli 2.

Nyní ukážeme, že pro n, které po dělení čtyřmi nedává zbytek 2, má rovnice $x^2 - y^2 = n$ řešení.

Pokud n je liché, můžeme za (x, y) zvolit $(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$. Jistě jsou x i y celá čísla (protože n je liché) a $(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2 = n$.

Ukažme si, jak se dá přijít k takovémuto řešení (jelikož výsledek spadlý z nebe nemá nikdo rád). Levou stranu rovnice si rozložíme na $(x+y)(x-y) = n$. To se nám rozpadá na soustavu dvou lineárních rovnic $x + y = a, x - y = b$, kde a, b jsou celá čísla splňující $ab = n$. Položíme-li $a = n, b = 1$, zjistíme, že tato soustava má řešení $(x, y) = (\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$.

Pokud n je násobek čtyřky, pak za (x, y) zvolíme $(\frac{n}{4} + 1, \frac{n}{4} - 1)$. Jistě x i y jsou celá a $(\frac{n}{4} + 1)^2 - (\frac{n}{4} - 1)^2 = n$.

Opět si ukažme, jak se dá přijít k takovémuto řešení. Analogicky jako v předchozím případě si levou stranu rovnice si rozložíme na $(x+y)(x-y) = n$, což se nám rozpadá na soustavu dvou lineárních rovnic $x + y = a, x - y = b$, kde a, b jsou celá čísla splňující $ab = n$. Položíme-li $a = \frac{n}{2}, b = 2$, dostaneme přesně řešení $(x, y) = (\frac{n}{4} + 1, \frac{n}{4} - 1)$.

Úloha 3.C. Parlament v Šanganjosechitinu má tvar dvacetistěnu, který je pokrytý poslanci, na každém trojúhelníku jeden (gravitační pole uvažujme centrální, do středu). Zazněl pokyn "Kdo je pro, ať zvedne ruku", ale nikdo neslyšel otázku, a tak každý poslanec zvedne ruku právě tehdy, když většina jeho sousedů (tzn. alespoň dva ze tří) mají ruku nahoře, přičemž na začátku mají všichni ruku dole. Kolik nejméně poslanců musíme nahradit agenty se zvednutou rukou, abychom způsobili, že zvednou ruku nakonec všichni?

Řešení. **Řešení autora a Kateřiny Matulové:** Stěny s agenty a jejich vrcholy obarvíme modře, zbytek bíle a dokážeme pár tvrzení:

Tvrzení. Všechny vrcholy musí být modré.

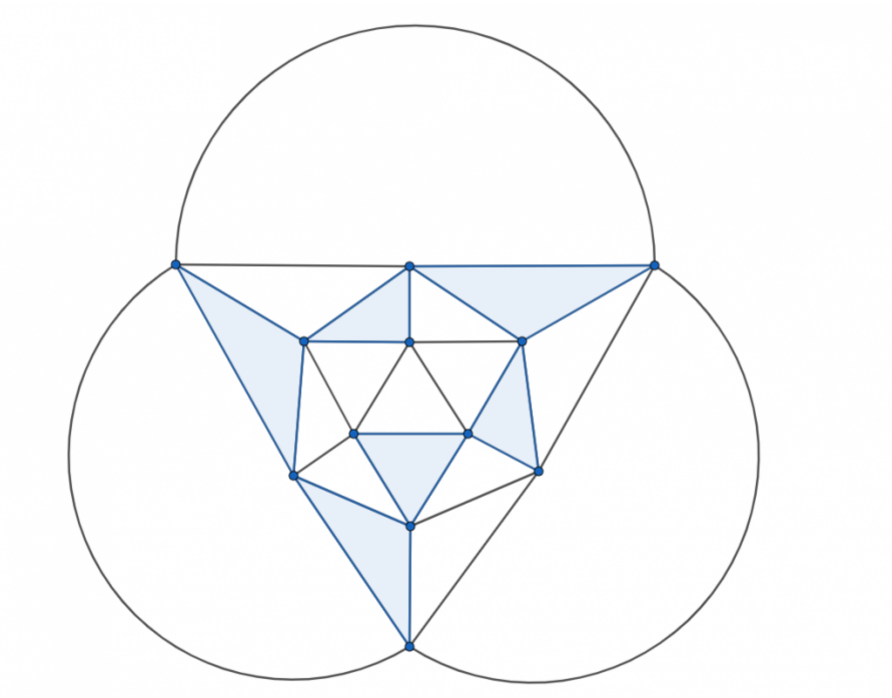
Důkaz. Kdyby ne, potom kolem bílého vrcholu je pět bílých trojúhelníků bez agenta a žádný z nich tedy nelze ovlivnit.

Tvrzení. Modré trojúhelníky tvoří jeden souvislý celek, tzn. od každého agenta se lze k libovolnému jinému dostat pouze po modrých trojúhelnících a vrcholech.

Důkaz. Kdyby ne, existovala by řada bílých trojúhelníků sousedících hranami tvořící uzavřený cyklus a oddělující jeden modrý ostrov od druhého. Tento cyklus by pak taky nebyl ovlivnitelný, neboť každý bílý trojúhelník sousedí s dalšími dvěma bílými trojúhelníky z cyklu.

Tedy pro n modrých trojúhelníků může být maximálně $2n+1$ modrých vrcholů, protože souvislý celek vždy můžeme tvořit pokládáním trojúhelníků v takovém pořadí, kdy první trojúhelník obarví tři vrcholy a každý další sousedící pak dva další a celkový počet obarvených vrcholů nezáleží na pořadí trojúhelníků.

Aby bylo tedy modrých vrcholů 12, je potřeba alespoň 6 modrých trojúhelníků. Řešení se šesti poslanci je tento graf izomorfní se strukturou dvacetistěnu (jedna stěna je celé okolí):



Řešení Vaška Janáčka: Nejdříve ukáži, že 5 agentů nestačí.

Aby některý z poslanců zvedl ruku, musí mít alespoň dva jeho sousedé zvednutou ruku. To ale znamená, že tento poslanec ovlivní (tzn. bude jedním ze dvou sousedních se zvednutou rukou) nejvýše jednoho jiného poslance.

Každý agent může ovlivnit až 3 poslance. Celkem pro a agentů a $20 - a$ normálních poslanců existuje nejvýše $3a + (20 - a) = 20 + 2a$ různých ovlivnění.

Přitom každý poslanec musí být ovlivněn dvěma lidmi. Celkem tedy pro a agentů musí poslanci dohromady vykonat alespoň $(20 - a) \cdot 2$ ovlivnění. Máme tedy $20 + 2a \geq 40 - 2a$, tedy $a \geq 5$. Pro $a = 5$ by nastala rovnost, tedy by zejména každý poslanec skutečně musel ovlivnit jednoho jiného. To ale není možné, protože někdo musí zvednout ruku poslední a nikoho tedy neovlivní. Tedy je potřeba alespoň 6 agentů. Příklad se šesti viz výše.

Úloha 3.D. Uvažujme množinu $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ polynomů v n proměnných s celočíselnými koeficienty. Dále uvažujme množinu $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m-1\}$. Zjistěte, kolik existuje zobrazení $D : \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \to \mathbb{Z}_m$ splňujících

$$D(f + g) \equiv D(f) + D(g) \pmod{m},$$

$$D(fg) \equiv f(1, ..., 1)D(g) + g(1, ..., 1)D(f) \pmod{m}.$$

(Výraz $f(1, .., 1)$ tedy znamená, že do polynomu f dosadíme n jedniček.)

Řešení. Než začneme, jedna poznámka: pro zkrácení zápisu budeme místo zápisu „$a \equiv b \pmod{m}$" pro kongruence psát prosté rovnítko: $a = b$.

Naše zobrazení D má splňovat dvě podmínky. Tou první je $D(f + g) = D(f) + D(g)$, tzv. *aditivita*. A tou druhou je $D(fg) = f(1, ..., 1)D(g) + g(1, ..., 1)D(f)$, tzv. *Leibnizovo pravidlo.*

(Ještě jedna poznámka: někteří z vás možná ví, že jako Leibnizovo pravidlo se někdy označuje vztah pro derivaci součinu $(fg)' = f'g + fg'$. To není jen shoda jmen, obě Leibnizova pravidla jsou jistou instancí velice obecného geometrického principu.)

Tuto úlohu je potřeba řešit pozvolna pomocí několika dílčích úvah. Ty si postupně rozebereme. Začneme však definicí, která nám usnadní následující rozbor: řekneme, že polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ je *jednočlen*, pokud je tvaru $cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, kde $c \in \mathbb{Z}$ a $k_1, ..., k_n$ jsou nezáporná celá čísla. Navíc řekneme, že dva jednočleny $P = cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, Q = dx_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ jsou *různého typu*, pokud existuje $i \in \{1, ..., n\}$ takové, že $k_i \neq l_i$.

Lemma. Nechť D je zobrazení vyhovující zadání. Pak pro každé celé číslo $c \in \mathbb{Z}$ platí $D(c) = 0$.

Důkaz. Z aditivity dostaneme $D(0) = D(0+0) = D(0)+D(0)$. Odečtením $D(0)$ od obou stran této rovnosti dostáváme $D(0) = 0$. Dále z Leibnizova pravidla dostáváme $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1)$ a tedy analogicky $D(1) = 0$. A nakonec $0 = D(0) = D(1 + (-1)) = D(1) + D(-1) = D(-1)$.

To nás ale přivádí již skoro do cíle: pro přirozené číslo n nyní máme $D(n) = D(1+\cdots+1) = D(1)+\cdots+D(1) = 0$ a pro záporné celé číslo $-n$ dostaneme $D(-n) = D((-1) \cdot n) = -1 \cdot D(n) + n \cdot D(-1) = 0$. Konec důkazu.

Uvědomme si, že z toho pro libovolný polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ a libovolnou konstantu $c \in \mathbb{Z}$ dostaneme $D(cf) = cD(f) + f(1, ..., 1)D(c) = cD(f)$.

Lemma. Nechť D je zobrazení vyhovující zadání, k je libovolné přirozené číslo, $i \in \{1, ..., n\}$. Pak $D(x_i^k) = kD(x_i)$.

Důkaz. Toto lemma dokážeme jednoduchou indukcí. Pro $k = 1$ toto tvrzení jistě platí. Chceme vyvodit platnost pro $k + 1$ z platnosti pro k. Počítejme (použijeme Leibnizovo pravidlo): $D(x_i^{k+1}) = D(x_i^k \cdot x_i) = 1 \cdot D(x_i^k) + 1 \cdot D(x_i) = kD(x_i) + D(x_i) = (k + 1)D(x_i)$ a tvrzení je dokázáno.

Nyní překročíme o krok dál, kde budeme uvažovat více proměnných.

Lemma. Nechť D je zobrazení vyhovující zadání, $k_1, ..., k_n$ jsou libovolná nezáporná celá čísla. Pak $D(x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}) = k_1D(x_1) + \dots + k_nD(x_n)$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí, ale nyní trochu fikaněji: vůči $K = k_1 + \dots + k_n$. Tvrzení jistě platí pro $K = 0, K = 1$. Chceme tedy z platnosti pro K vyvodit platnost pro $K+1$ a předpokládáme, že K je alespoň 1. Můžeme si tedy zvolit $i \in \{1, ..., n\}$ takové, že $k_i > 0$. Počítejme: $D(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}) = D(x_i \cdot (x_1^{k_1} \cdots x_i^{k_i-1} \cdots x_n^{k_n})) = 1 \cdot D(x_1^{k_1} \cdots x_i^{k_i-1} \cdots x_n^{k_n}) + 1 \cdot D(x_i) = k_1D(x_1) + \dots + (k_i - 1)D(x_i) + \dots + k_nD(x_n) + D(x_i) = k_1D(x_1) + \dots + k_nD(x_n)$ a důkaz je u konce.

Nyní nastal čas si všimnout zásadního faktu:

Tvrzení. Nechť $a_1, ..., a_n$ je libovolná n-tice čísel ze $\mathbb{Z}_m$. Pokud existuje zobrazení D vyhovující podmínkám ze zadání takové, že $D(x_i) = a_i$ pro všechna $i \in \{1, ..., n\}$, pak je jediné.

Důkaz. Předpokládejme, že takové D existuje. Podle lemmatu 3 víme, kam D zobrazí libovolný jednočlen: $D(cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}) = c(k_1a_1 + \dots + k_na_n)$. Uvažujme nyní konečně zcela libovolný polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$. Ten se dá jednoznačně napsat jako součet jednočlenů po dvou různého typu $f = P_1 + \dots + P_k$. Potom ale z aditivity plyne $D(f) = D(P_1 + \dots + P_k) = D(P_1) + \dots + D(P_k)$, přičemž obrazy polynomů P_i už známe. Tedy zadáme-li obrazy (ve zobrazení D) polynomů $x_1, ..., x_n$, automaticky nám to zadá i obrazy všech ostatních polynomů. Tím je důkaz hotov.

Nyní dokážeme, že pro libovolnou n-tici čísel $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ opravdu existuje D splňující požadavky ze zadání takové, že $D(x_1) = a_1, ..., D(x_n) = a_n$. My už vlastně z předchozího důkazu víme, jak toto zobrazení musí být zadané:

- Pro jednočlen $P = cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ máme $D(P) = c(k_1a_1 + \dots + k_na_n)$,
- Pro polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$, který je součtem jednočlenů po dvou různého typu $f = P_1 + \dots + P_k$, máme $D(f) = D(P_1) + \dots + D(P_k)$.

Stačí nám dokázat, že toto zobrazení splňuje aditivitu a Leibnizovo pravidlo. Ukázat do první je snadné: libovolné polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ si přece můžeme napsat jako součty jednočlenů (po dvou různého typu) $f = P_1 + \dots + P_k, g = Q_1 + \dots + Q_l$. Potom z toho, jak je D zadáno, máme $D(f + g) = D(P_1 + \dots + P_k + Q_1 + \dots + Q_l) = D(P_1) + \dots + D(P_k) + D(Q_1) + \dots + D(Q_l) = D(P_1 + \dots + P_k) + D(Q_1 + \dots + Q_l) = D(f) + D(g)$.
Zbývá tedy dokázat poslední fakt:

Tvrzení. Zobrazení D dáno výše splňuje Leibnizovo pravidlo.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že je Leibnizovo pravidlo splněno pro jednočleny. Uvažme $P = cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, Q = dx_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ a počítejme: $D(PQ) = D(cdx_1^{k_1+l_1} \cdots x_n^{k_n+l_n}) = cd((k_1 + l_1)a_1 + \cdots + (k_n + l_n)a_n) = dc(k_1a_1 + \cdots + k_na_n) + cd(l_1a_1 + \cdots + l_na_n) = cD(Q) + dD(P) = P(1, ..., 1)D(Q) + Q(1, ..., 1)D(P)$.

Nyní zbývá dokončit důkaz pro libovolné polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$. Opět si vyjádřeme f, g jako součty jednočlenů: $f = P_1 + \cdots + P_k, g = Q_1 + \cdots + Q_l$. A počítejme:

$$
\begin{aligned}
D(fg) &= D\left((P_1 + \cdots + P_k)(Q_1 + \cdots + Q_l)\right) = D\left(\sum_{i,j} P_iQ_j\right) = \\
&= \sum_{i,j} D(P_iQ_j) = \sum_{i,j} (P_i(1, ..., 1)D(Q_j) + Q_j(1, ..., 1)D(P_i)) = \\
&= (P_1(1, ..., 1) + \cdots + P_k(1, ..., 1)(D(Q_1) + \cdots + D(Q_l))+ \\
&\quad + (D(P_1) + \cdots + D(P_k))(Q_1(1, ..., 1) + \cdots + Q_l(1, ..., 1)) = \\
&= f(1, ..., 1)D(g) + g(1, ..., 1)D(f).
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz hotov.

Vidíme tedy, že pro každou uspořádanou n-tici (ne nutně různých) prvků ze $\mathbb{Z}_m$ (což je m-prvková množina) máme právě jedno D vyhovující zadání. Celkový počet těchto zobrazení je tedy počet možností, jak vybrat n ne nutně různých prvků z m-prvkové množiny – tedy m^n.

(Ještě jedna poznámka zcela bokem: pokud někdo ze čtenářů ve své budoucí matematické kariéře narazí na pojem *modul Kählerových diferenciálů* (nebo na *algebraické 1-formy*), jistě si uvědomí, že tento příklad je jednoduchým důsledkem toho, že modul $\Omega_{\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]/\mathbb{Z}}$ je volný na n generátorech.)