Řešení 2. série

Funkcionální rovnice

Úloha 2.1. Dáma vyměňuje celá čísla podle určitých pravidel. Zjistili, že ať si Kouma vybere jakékoliv celé číslo k a Bubla jakékoli celé číslo n, dáma jim je vymění za celá čísla k' a n' taková, že když je pak sečtou, získají stejný výsledek, jako kdyby je nejprve sečetli a součet $k + n$ pak u dámy vyměnili. Co nám dáma vrátí, když jí dáme číslo 0?

Řešení. Dámu v zadání si můžeme představit jako nějakou funkci f, pro kterou platí, že ať už do ní vložíme jakákoliv celá čísla k, n, bude platit $f(k) + f(n) = f(k + n)$.

Co se stane, když do ní vložíme nulu? Ze základní vlastnosti f plyne, že pro libovolné celé číslo k bude $f(k)+f(0) = f(k+0)$, tedy $f(k)+f(0) = f(k)$. Toto vyjádření už snadno upravíme a získáme $f(0) = f(k) - f(k) = 0$. Dáma nám tedy vrátí 0.

Úloha 2.2. Které funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňují

$$f(x^2 + y^2) = f(x)y + f(y)x$$

pro všechna reálná x, y?

Řešení. Dosazením $x = y = 0$ dostáváme $f(0) = 0$. Dále můžeme dosadit pouze $y = 0$ a získáváme $f(x^2) = f(x) \cdot 0 + f(0) \cdot y = 0$, je tedy $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$. Konečně, dosazením $y = 1$ získáme $0 = f(x^2 + 1) = f(x) \cdot 1 + f(1) \cdot x = f(x)$ pro všechna x. Jediným kandidátem na řešení je tedy nulová funkce (funkce, která je pro všechny argumenty vždy rovna 0). Zkouškou ověříme, že tato funkce řešením opravdu je.

Úloha 2.3. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(x + f(y)) = x^2 + f(y^2) + 2xf(y)$$

pro všechna reálná x, y.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že nějaká funkce f dané rovnici vyhovuje.
Podíváme se, které členy v rovnici jsou nejošklivější a dosadíme za x a y takové hodnoty, aby se nám tyto členy odečetly. Vím, že to je subjektivní, ale za mě jsou nejošklivější členy $f(x + f(y))$ a $f(y^2)$. Aby se tyto členy odečetly, tak stačí, aby platilo $x + f(y) = y^2$. Dosaďme tedy do rovnice $y = t$ a $x = t^2 - f(t)$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
f((t^2 - f(t)) + f(t)) &= (t^2 - f(t))^2 + f(t^2) + 2(t^2 - f(t))f(t);\\
f(t^2) &= t^4 - 2t^2 f(t) + f^2(t) + f(t^2) + 2t^2 f(t) - 2f^2(t);\\
f^2(t) &= t^4.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $f(t) = t^2$ nebo $f(t) = -t^2$ [1]. Odtud určitě víme, že $f(0) = 0$. Dosaďme nyní do rovnice ze zadání $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x + f(0)) &= x^2 + f(0^2) + 2xf(0) \\ f(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Dostáváme, že tedy máme jediné možné řešení $f(x) = x^2$. Zkouškou snadno ověříme, že se opravdu jedná o řešení.

Úloha 2.4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že splňují následující rovnost pro všechna reálná x a y:

$$f(f(x) + y) + f(y) = x + 2f(f(y)).$$

Řešení. Nechť f je libovolná funkce splňující rovnici $f(f(x)+y)+f(y) = x+2f(f(y))$ pro libovolná reálná čísla x a y.

Ukažme, že f je injektivní (prostá) – tedy že pokud $f(x_1) = f(x_2)$, tak rovněž $x_1 = x_2$. Nechť x_1 a x_2 jsou libovolná reálná čísla splňující $f(x_1) = f(x_2)$. Pak po dosazení $y = 0$ platí: $x_1 = f(f(x_1) + 0) + f(0) - 2f(f(0)) = f(f(x_2) + 0) + f(0) - 2f(f(0)) = x_2$. Funkce f je tedy prostá.

Ukažme, že $f(0) = 0$. Nechť $x = y = 0$. Potom dostaneme rovnost $f(f(0)) + f(0) = 2f(f(0))$, neboli $f(0) = f(f(0))$. Jelikož f je injektivní, tak dostaneme $0 = f(0)$.

Po dosazení $y = 0$ do rovnice dostaneme $f(x) = x$. Nakonec zkouškou ověříme, že identita je skutečně řešením.

Úloha 2.A. Kolik existuje dělitelů čísla 81 000, kteří jsou dělitelní číslem 100?

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $100 \mid a$, $a \mid 81000$. Pak $a = 100v$ pro nějaké přirozené číslo v a $81000 = ak$ pro nějaké přirozené k. Tedy $81000 = 100kv$, po úpravě: $810 = kv$. Stačí tedy hledat počet dělitelů v čísla 810.

Ke zjištění počtu dělitelů čísla 810 využijeme jeho rozklad na součin prvočísel: $810 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 3^4$. Každý z dělitelů v čísla 810 bude ve tvaru $v = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, přičemž každé z prvočísel se v jeho rozkladu vyskytuje maximálně ve stejné mocnině, jako v rozkladu čísla 810; tedy $a, c \in \{0, 1\}, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Máme tedy 2 možnosti pro a a c a 5 možností pro b. Celkem to dává $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ možných kombinací, číslo 810 má tedy 20 dělitelů, proto i číslo 81000 má 20 dělitelů, kteří jsou násobky stovky.

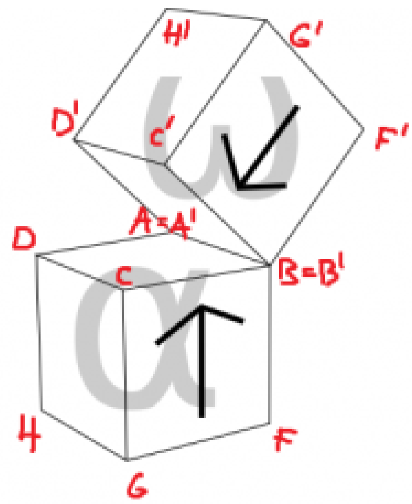
Úloha 2.B. Sekta Kubicistů věří, že podstata světa je ukryta ve dvou kostkách α a ω o stejné délce hrany, které mají na jedné stěně vyrytou šipku. Na počátku světa se touto stěnou dotýkaly tak, že šipky ukazovaly stejným směrem. V průběhu dění α zůstává stabilně na

[1] mimochodem toto neznamená, že jsme našli pouze dvě funkce, které rovnici mohou vyhovovat, protože uvedenou podmínku splňuje například i g definovaná následovně:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \neq 1, \\ -1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

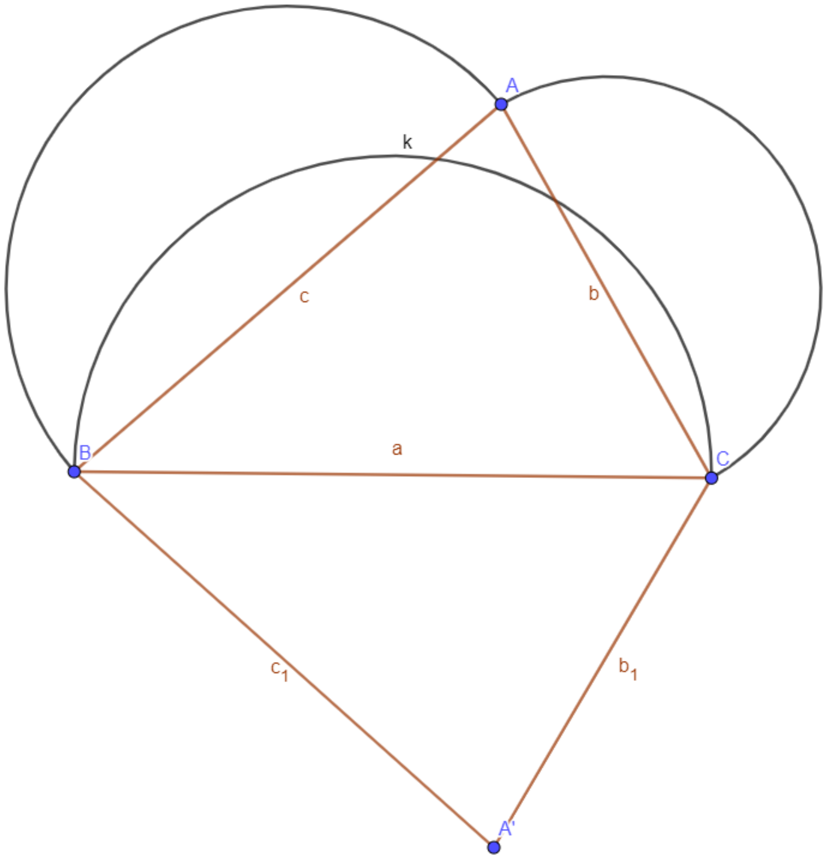
místě a ω se po ní ze všech stran koulí: vždy se překlopí přes nějakou hranu. Konec světa pak nastane, až se ω bude opět dotýkat α šipkou na šipku, ale šipky nebudou směřovat stejným směrem. Dokažte, že šipka opravdu vždy dolehne opět na šipku (tzn. stěna se šipkou jedné kostky se nikdy nepotká se stěnou bez šipky druhé kostky), ale že konec světa nastat nemůže, tzn. šipky při dotyku budou směřovat vždy stejným směrem.

Řešení. Označíme vrcholy obou krychlí podobně vzhledem k rovinové symetrii. V původní pozici tak označíme obraz bodu X v rovinové souměrnosti podle stěny se šipkou jako X'. Po každém otočení bude označení opět korespondovat s rovinovou symetrií podle stěny, kterou se dotýkají (důvod je zřejmý -> v každém časovém okamžiku je případ souměrný, podobně jako koulení krychle po zrcadlové ploše). Nemůže tedy nastat případ, kdy by se stěna se šipkou dotýkala stěny bez šipky, jelikož v dotýkajících se stěnách musí být vrcholy označeny stejně (až na čárku). Ze stejného důvodu nemůže být šipka orientována jinak.



Úloha 2.C. Definujme trojúhelníkoid jako ostroúhlý trojúhelník, který má ke každé straně přilepený půlkruh (s touto stranou jakožto průměrem). Uvažujme dva shodné protínající se trojúhelníkoidy se stranami délek a, b, c. Jaké je nejmenší S takové, že pokud je obsah jejich průniku (v závislosti na délkách stran) větší než S, můžeme s určitostí říct, že se protínají i vnitřní trojúhelníky trojúhelníkoidů?

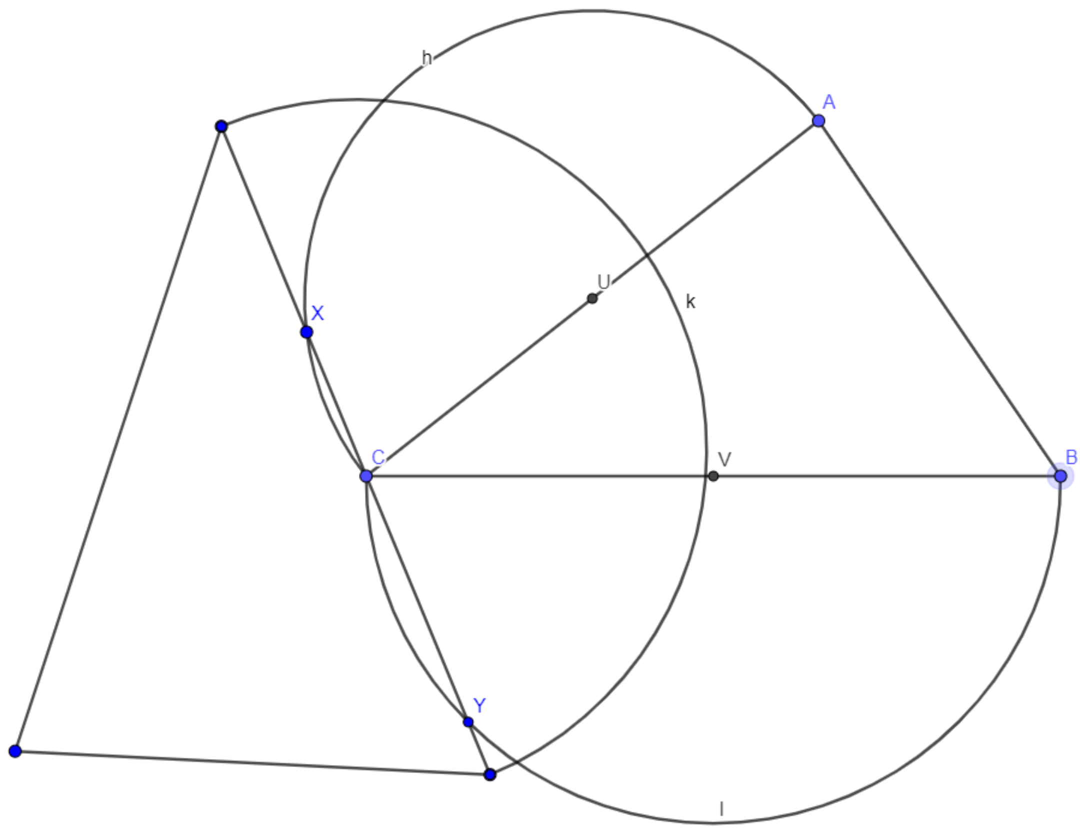
Řešení. Chceme najít průnik dvou trojúhelníkoidů, kde se neprotínají vnitřní trojúhelníky, s maximálním obsahem. Dokážeme, že ideální situace nastane v případě, že se vnitřní trojúhelníky dotýkají nejdelšími stranami (viz obrázek), a že v tom případě je obsah roven $\pi(\frac{a}{2})^2$, kde a je délka nejdelší strany trojúhelníku.



Uvažujme tedy situaci z obrázku, kde BC je nejdelší strana trojúhelníku ABC. Ukážeme, že celý půlkruh nad stranou a v trojúhelníkoidu $A'BC$ leží uvnitř trojúhelníkoidu ABC. Na to nám stačí ukázat, že bod A leží vně kružnice k vymezující tento půlkruh (celý půlkruh potom totiž leží v obdélníku daném stranou BC a bodem A a ten zase leží uvnitř trojúhelníkoidu ABC). Avšak k je součástí Thaletovy kružnice nad průměrem BC, tedy body vně této kružnice jsou právě ty body X splňující $|\measuredangle BXC| < 90°$. Jelikož trojúhelník ABC je ostroúhlý, bod A toto splňuje a tedy obsah průniku obou trojúhelníkoidů je v této situaci roven obsahu Thaletovy kružnice nad stranou BC, tj. $\pi(\frac{a}{2})^2$. Pro další postup si tuto hodnotu označme jako S.

Nyní ukážeme, že při jiné vzájemné poloze trojúhelníků, kde se neprotínají vnitřní trojúhelníky, je obsah vždy menší. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se vnitřní trojúhelníky dotýkají (jinak je vždy můžeme posunout blíže k sobě a tím se průnik nezmenší). Pokud se dotýkají v alespoň dvou bodech, dotýkají se částí jedné z krajních úseček, a tedy obsah průniku bude nejvýše obsah Thaletovy kružnice nad nějakou ze stran, tedy nejvýše S Pokud se dotýkají pouze v jednom bodě, znamená to, že jeden z vrcholů jednoho trojúhelníkoidu leží na nějaké straně druhého: opět můžeme BÚNO předpokládat, že je to nejdelší strana (zkrácením strany se průnik zmenší).

Označme si průsečíky jednotlivých půlkružnic se stranou a jako X, Y, viz obrázek:



Obsah průniku je v tomto případě tedy nejvýše $\frac{1}{2}S$ + obsah úseče XC + obsah úseče CY. Stačí tedy dokázat, že součet obsahů obou úsečí je menší nebo roven $\frac{1}{2}S$. Ukážeme silnější tvrzení: totiž, že součet obsahu kruhových *výsečí* XC a CY je menší nebo roven $\frac{1}{2}S$.

Označme středy úseček CA, CB jako U, V (viz obrázek). Pokud ukážeme $|\measuredangle XUC| + |\measuredangle CVY| \leq 180°$, máme vyhráno: součet obsahů výsečí pak bude jistě nejvýše obsah půlkružnice nad nejdelší stranou (to je totiž výseč daná úhlem 180°), tedy $\frac{1}{2}S$. Označme $\alpha = |\measuredangle XCU|, \beta = |\measuredangle YCV|$. Všimněme si, že $\alpha + \beta + |\measuredangle BCA| = 180°$ a že trojúhelníky XCU, YCV jsou rovnoramenné se základnami XC, YC. Nyní počítejme: $|\measuredangle XUC| + |\measuredangle CVY| = (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 360° - 2(180° - |\measuredangle BCA|) = 2|\measuredangle BCA| < 180°$. Tím je tedy důkaz konečně hotov.

Úloha 2.D. Sekty dělitelistů, kubicistů i trojúhelníkoidistů mají n členů. Každý z těchto $3n$ členů má ve zbývajících sektách právě $n+1$ kamarádů. Přátelství je vzájemné. Dokažte, že existuje skupina tří členů taková, že každý pochází z jiné sekty a všichni jsou navzájem kamarádi.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že neexistuje trojice členů různých sekt taková, že se všichni tři vzájemně kamarádí.

Označme jako k maximální počet kamarádů, které má kterýkoli člen v jedné jiné sektě. Poté uvažme libovolného ze členů, kteří mají k kamarádů v jiné sektě, nazvěme jej Kuba, jeho sektu označme A a sektu, v níž má k kamrádů, označme B. Víme, že $k \leq n$ (B má n členů). Protože má ale Kuba (stejně jako všichni ostatní) $n+1$ kamarádů, má i nějakého kamaráda ve třetí sektě, kterou označme C.

Nyní uvažme libovolného Kubova kamaráda ze sekty C a nazvěme jej Michal. Z našeho předpokladu vyplývá, že neexistuje žádný člen sekty B takový, že by se kamarádil s Kubou i s Michalem. Z toho, že Kuba má v B k kamarádů, pak vyplývá, že Michal má v B nejvýše $n - k$ kamarádů. Michal má ale také $n + 1$ kamarádů, a tedy má v A alespoň $n + 1 - (n - k) = k + 1$ kamarádů. To je ale spor s maximalitou k. Náš předpoklad tedy neplatí, čímž jsme dokázali, že taková trojice existuje.