Řešení 1. série

Úvodní guláš

Úloha 1.1. Bubla přede všemi rozdělovala karamelové bonbóny mezi Ňoumu, Koumu a Liběnku. Některé z karamelek však ještě rozdala skrytě, aby vyhověla tajným přáním a požadavkům svých přátel. Například, když dala několik karamelek někomu jinému než Ňoumovi, ten pak chtěl tajně dostat dvojnásobek tohoto počtu. Kouma, pokud viděl veřejné obdarování někoho jiného než sebe, si nárokoval skryté předání pouze stejného počtu. Liběnce bylo všechno jedno a nenárokovala si tajně nikdy nic.

Bubla ovšem chvíli před rozdáváním vypila pár sklenek vína a byla ve vcelku rozverné náladě. Proto při veřejném rozdávání karamelek tu a tam někomu pár bonbonů zase sebrala a při dodatečném tajném odebírání jim brala podle stejných pravidel, jako rozdávala.

Jak může Bubla dosáhnout toho, aby měli ostatní každý právě 10 karamelek, má-li jich přesně 30? Žádný ze 4 účastníků předávek samozřejmě nikdy nemůže mít záporný počet karamelek.

Příklad: Bubla dá veřejně 3 karamelky Liběnce, musí tedy skrytě předat další 3 Koumovi a 6 Ňoumovi. Následně odebere 1 Koumovi a musí proto navíc odebrat i 2 Ňoumovi.

Řešení. Jelikož je Liběnce všechno jedno a nenárokuje si tajně nikdy nic, musí někdy během rozdávání dostat 10 karamelek veřejně. Na základě těchto 10 veřejně rozdaných karamelek jich dostane Kouma 10 a Ňouma 20 tajně. Musíme tedy vymyslet, jak 10 karamelek Ňoumovi sebrat, aniž bychom ovlivnili karamelky rozdané ostatním. To se dá udělat tak, že 10 karamelek veřejně sebereme Koumovi (tajně tedy bereme 20 Ňoumovi) a následně dáme 10 karamelek veřejně Ňoumovi (Kouma jich dostane 10 tajně). Nyní stačí tyto kroky poskládat tak, aby nikdy neměl nikdo záporný počet karamelek a aby jich bylo během rozdávání použito maximálně 30. Toho docílíme například takto:

- Dáme veřejně 5 karamelek Liběnce, tajně 5 Koumovi a tajně 10 Ňoumovi.
- Vezmeme veřejně 5 kramelek Koumovi a tajně 10 Ňoumovi.
- Dáme veřejně 5 karamelek Liběnce, tajně 5 Koumovi a tajně 10 Ňoumovi.
- Vezmeme veřejně 5 kramelek Koumovi a tajně 10 Ňoumovi
- Dáme veřejně 10 karamelek Ňoumovi a tajně 10 Koumovi.

Úloha má samozřejmě spoustu jiných možností, jak požadovaného rozdělení docílit.

Úloha 1.2. Kouma a Ňouma hráli pantomimickou hru. Kouma předvedl číslo 1, Ňouma číslo n. Pak opakovaně měnili své číslo vždy na jiného dělitele čísla n tak, že číslo, které předváděli, vynásobili nebo vydělili nějakým prvočinitelem čísla n. Toto prováděli zaráz. Pro která n se může stát, že v jednu chvíli předvádí stejné číslo?

BRKOS Team 2020

Řešení. Dokážeme, že Kouma a Ňouma můžou ukázat stejné číslo právě tehdy, když původní číslo mělo sudý součet exponentů v rozkladu na prvočinitele.

Pro libovolné přirozené číslo k definujme číslo $P(k)$, které je rovno jedné, pokud má k sudý součet exponentů v rozkladu na prvnočinitele, a jinak je rovno nule. Například tedy $P(1) = 1$, $P(2) = 0$, $P(6) = 1$, $P(12) = 0$.

Označme si Koumovo číslo v kroku i jako a_i a Ňoumovo číslo jako b_i. Je zřejmé, že $P(a_i) \neq P(a_{i+1})$ a $P(b_i) \neq P(b_{i+1})$ (jelikož oba vynásobí/vydělí své číslo prvočinitelem) a že pokud $P(a_j) \neq P(b_j)$, pak Kouma a Ňouma v kroku j neukázali stejné číslo.

Díky těmto dvěma podmínkám rovnou vidíme, že pokud $P(a_1) = P(1)$ se nerovná $P(b_1) = P(n)$, pak Kouma a Ňouma nikdy nemůžou ukázat stejné číslo. Jelikož $P(1) = 1$, pokud n má lichý součet exponentů v rozkladu na prvočinitele, Kouma a Ňouma nikdy nemůžou ukázat stejné číslo.

Nyní nám stačí ukázat, že pokud n má sudý součet exponentů v rozkladu na prvočinitele, pak existuje posloupnost akcí takových, že číslo Koumy se rovná součtu Ňoumy. Budeme tedy předpokládat, že $P(n) = 1$ platí. Pokud $n = 1$, pak oba hned na začátku ukázali stejné číslo. Nyní předpokládejme, že $n > 1$ a n má tedy nějaké prvočíslné dělitele. Uvažme následující posloupnost akcí:

- Pokud je tvoje číslo 1, pak vynásob svoje číslo nějakým prvočinitelem dělícím n.
- Pokud tvoje číslo není 1, pak vyděl svoje číslo nějakým prvočinitelem dělícím n.

Je zřejmé, že v konečném čase Kouma i Ňouma začnou cyklit mezi 1 a nějakým prvočinitelem. Jelikož $P(n) = P(1)$, je zřejmé, že se nemůže stát, že by Kouma ukázal 1 a Ňouma ukázal prvočinitele, a tedy v konečném čase Kouma i Ňouma ukážou 1.

Úloha 1.3. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid právě tehdy, když $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník a zároveň jeho úhlopříčky AC a BD jsou na sebe kolmé.

Řešení. Kvůli nesrovnalostem v definicích deltoidu si nejprve deltoid zaveďme. V této úloze tedy budeme předpokládat, že deltoid je konvexní čtyřúhelník, který je souměrný podle alespoň jedné úhlopříčky.

Budeme využívat fakt, že čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když je konvexní a zároveň součty protějších stran jsou stejné, tedy $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Ze zadání máme dokázat ekvivalenci, tedy dvě implikace.

Pokud je čtyřúhelník $ABCD$ deltoidem, je souměrný podle alespoň jedné úhlopříčky. Bez újmy na obecnosti, nechť je souměrný podle AC. Jelikož body B a D jsou svými vzájemnými obrazy, musí ležet na nějaké přímce kolmé k AC. To ale přesně znamená, že úhlopříčka BD je kolmá na AC. Zároveň víme, že $|AB| = |AD|$ (jelikož body B a D jsou od přímky AC stejně vzdáleny) a podobně $|CB| = |CD|$. Díky tomu zejména platí $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ a jelikož je deltoid z definice konvexní, čtyřúhelník je tečnový.

Druhá implikace je složitější. Předpokládáme tečnový čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém jsou na sebe kolmé úhlopříčky. Označme průsečík úhlopříček jako P. Přímo tedy víme, že $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ a $AC \perp BD$. Nechť r je poloměr kružnice vepsané tomuto čtyřúhelníku. Pak $|AB|r + |CD|r = |AD|r + |BC|r$ a tedy $\frac{|AB|r}{2} + \frac{|CD|r}{2} = \frac{|AD|r}{2} + \frac{|BC|r}{2}$. Ale to jsou přesně obsahy nějakých trojúhelníků, jelikož tečna ke kružnici je kolmá k nějakému jejímu poloměru. Nechť k, l, m, n jsou po řadě vzdálenosti $|SA|, |SB|, |SC|, |SD|$, kde S je střed oné vepsané kružnice. Jelikož jsou úhlopříčky na sebe kolmé, můžeme obsah $\frac{|AB|r}{2}$

napsat jako $\frac{kl}{2}$. Podobně pro ostatní obsahy. Dosazením do naší rovnice získáme:

$$\frac{kl}{2} + \frac{mn}{2} = \frac{kn}{2} + \frac{lm}{2}$$
$$kl - kn + mn - lm = 0$$
$$k(l-n) - m(l-n) = 0$$
$$(k-m)(l-n) = 0$$

Tedy platí buď $k = m$ nebo $l = n$, ale to přesně znamená, že jedna úhlopříčka půlí druhou a z toho, že úhlopříčky jsou na sebe kolmé, přímo plyne, že čtyřúhelník musí být souměrný podle alespoň jedné úhlopříčky. Z tečnovosti pak máme konvexnost, a proto musí být čtyřúhelník deltoidem.

Úloha 1.4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník takový, že úhly ABC a BCD jsou tupé. Označme P průsečík přímek AB a CD. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku APD. Nechť E, F jsou takové body na k, že body E, B, C, F leží na jedné přímce v tomto pořadí. A nakonec označme G průsečík přímky AB s osou úhlu BEA a H průsečík přímky CD s osou úhlu CFD. Ukažte, že body E, F, G a H leží na jedné kružnici.

Řešení. Vzhledem k tomu, že v zadání se vyskytuje spousta kružnic, tak budeme celou dobu používat různé vlastnosti tětivových čtyřúhelníků. Ale pozor! To, že samotný čtyřúhelník $EFGH$ je tětivový, dokážeme poměrně nestandardně. A to tak, že ukážeme, že všechny čtyři vrcholy mají stejnou vzdálenost od bodu P, takže musí ležet na kružnici se středem P a poloměrem daným vzdáleností P od libovolného z nich. Tak s chutí do toho! Naším prvním cílem bude ukázat, že $|\sphericalangle EAP| = |\sphericalangle PDF|$. Označme první z nich jako φ, úhel $\sphericalangle AEF$ jako 2ω a nakonec úhel $\sphericalangle ADC$ jako δ. Jelikož $ABCD$ je tětivový, tak $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - \delta$. To ale znamená, že $|\sphericalangle EBA| = \delta$ (protože se jedná o vedlejší úhel k $\sphericalangle ABC$). Podívejme se nyní na trojúhelník AEB a tětivový čtyřúhelník $ADFE$. Oba sdílejí úhel 2ω, tak se pojďme podívat, jaké vztahy s ním nám dávají:

$$180^\circ = 2\omega + \varphi + \delta \quad (\text{z } ABE)$$
$$180^\circ = 2\omega + \delta + |\sphericalangle PDF| \quad (\text{z } ADFE).$$

Odečtením dostaneme $\varphi = |\sphericalangle PDF|$. Jelikož $\sphericalangle EAP$ a $\sphericalangle EFP$ jsou obvodové úhly příslušné tětivě EP, tak dostáváme $\varphi = |\sphericalangle EFP|$. Analogicky bychom dokázali, že i $|\sphericalangle FEP| = \varphi$. No ale tím pádem je trojúhelník rovnoramenný, takže musí platit $|PE| = |PF|$! Zbývá ukázat, že stejnou délku mají i úsečky PG a PH. To už ale bude snadné. Jelikož $\sphericalangle EGP$ je vedlejší k $\sphericalangle EGA$, tak jeho velikost musí být stejná jako velikost součtu zbývajících úhlů v trojúhelníku AGE tedy $\omega + \varphi$. No ale před chvílí jsme zdůvodnili, že $|\sphericalangle FEP| = \varphi$, takže $|\sphericalangle GEP| = \omega + \varphi$, z čehož vyplývá, že trojúhelník PEG je rovnoramenný, takže opravdu platí, že $|PE| = |PG|$. Analogicky by se dokázalo, že $|PF| = |PH|$ a důkaz je u konce.

Úloha 1.A. Najděte všechny trojice prvočísel p, q, r vyhovující rovnosti $\frac{7}{p} + \frac{11}{q} + \frac{13}{r} = 10$.

Řešení. $\frac{7}{p} + \frac{11}{q} + \frac{13}{r} = 10$. Obě strany rovnice vynásobíme pqr a získáme: $7qr + 11pr + 13pq = 10pqr$. Číslo vpravo je sudé, tedy i číslo vlevo musí být sudé. Když číslo vynásobíme lichým číslem, tak se jeho parita (sudost nebo lichost) nezmění. Tedy i číslo $n := qr + pr + pq$ musí být sudé[1]. Nyní rozebereme možné případy podle počtu lichých

[1] := znamená přiřazení

prvočísel.

- Jsou-li všechna prvočísla lichá, budou i všechny tři součiny qr, pr a pq liché a tedy i n bude liché. Alespoň jedno prvočíslo je tedy sudé.
- Je-li právě jedno prvočíslo sudé, budou dva součiny sudé (ty, v kterých se vyskytuje ono prvočíslo) a jeden lichý. A protože přičtení sudého čísla nemění paritu, bude i n liché. Tedy alespoň dvě prvočísla jsou sudá.
- Jsou-li dvě nebo všechna tři prvočísla sudá, budou i všechny součiny sudé a tedy i n bude sudé. Tento případ je tedy v pořádku.

Když si uvědomíme, že jediné sudé prvočíslo je 2, bude nám stačit projít čtyři případy:

- všechna sudá. $\frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{13}{2} = \frac{31}{2} \neq 10$. Spor.
- p liché, ostatní sudá. $\frac{7}{p} + \frac{11}{2} + \frac{13}{2} = 10$, $\frac{7}{p} + 12 = 10$, $\frac{7}{p} = -2$, $p = -\frac{7}{2}$. Není prvočíslo.
- q liché, ostatní sudá. $\frac{7}{2} + \frac{11}{q} + \frac{13}{2} = 10$, $\frac{11}{q} + 10 = 10$, $\frac{11}{q} = 0$. $11 = 0$. Nemá řešení.
- r liché, ostatní sudá. $\frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{13}{r} = 10$, $9 + \frac{13}{r} = 10$, $\frac{13}{r} = 1$, $r = 13$. Je prvočíslo. Máme tedy řešení.

Jediné řešení tedy je $p = 2$, $q = 2$, $r = 13$.

Úloha 1.B. Rozhodněte, zda lze pokrýt obdélník 5×4 všemi pěti různými (neshodnými) tetrominy (souvislé objekty sestávající ze čtyř jednotkových čtverců).

Řešení. Nejprve obarvíme pole obdélníku 4×5 černobíle jako na šachovnici (tzn. 10 bílých a 10 černých) a řešme sporem. Kdybychom vyskládali obdélník 4×5 všemi pěti tetrominy, jistě by čtyři tetromina zabírala po dvou bílých a dvou černých a poslední, tetromino tvaru "T", by zabralo buď 1 bílé a 3 černá pole, nebo 1 černé a 3 bílé. To ale celkem dává zabraných 9 polí jedné barvy a 11 polí druhé, což ale není možné.

Úloha 1.C. Prasečí agility se hodnotí na základě času, za který dané sele proběhne překážkovou dráhou. Soupeří proti sobě vždy dvojice. Posledního turnaje se účastnila alespoň 3 selata. Každé soupeří s každým (jiným) právě jednou a víme, že každé sele nakonec alespoň jednou vyhrálo (remízy nebyly). Dokažte, že existuje trojice selat A, B, C taková, že A vyhrál nad B, B nad C a C nad A.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že taková trojice (A, B, C) neexistuje. Tedy předpokládejme, že pro každé tři selata A, B a C platí: Jestliže sele A porazilo sele B a sele B porazilo C, tak sele A porazilo i sele C.

Označme n počet selat, které se účastní závodu. Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $k \leq n$ existuje k-tice selat $(P_1, P_2, ...P_k)$ taková, že sele P_i vyhrálo nad seletem P_j, pokud $i < j$. Pro $k = 1$ tvrzení platí.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro k a dokažme že platí pro $k + 1$. Pokud $k + 1 > n$ pak trvzení platí, protože jsme nesplnili předpoklad věty. V opačném případě z indukčního předpokladu existuje $k$tice selat $(P_1, P_2, ..., P_k)$ taková, že sele s nižším číslem vyhrálo nad seletem s číslem vyšším. Jelikož sele P_k bylo poraženo selaty P_1, P_2, ..., P_{k-1}, tak nad nimi nemohlo ze zadání vyhrát. Ze zadání sele P_{k-1} vyhrálo nad jiným seletem (různým od selete z $k$tice). Označme ho P_{k+1}. Ukažme, že $k+1$tice $(P_1, P_2, ...P_k, P_{k+1})$ splňuje P_i porazilo P_j v případě, že $i < j$. V případě, že $j < k$, pak určitě $i < j < k$ a můžeme použít indukční předpoklad. V případě, že $i = k \wedge j = k+1$, tak naše tvrzení plyne z volby P_{k+1}. A nakonec zbývá případ, že $i < k \wedge j = k+1$: Sele P_i porazilo sele P_k z indukčního předpokladu a také víme, že sele P_k porazilo P_{k+1} (z volby P_{k+1}). Z předpokladu pro spor plyne, že sele P_i porazilo P_{k+1}.

Nyní použijeme větu výše pro $k = n$ (pro všech n selat). Sele P_n bylo poraženo všemi ostatními selaty a tedy nevyhrálo žádný zápas. Dostáváme tedy spor. Proto existuje trojice selat (A, B, C) taková, že A porazilo B, B porazilo C a C porazilo A.

Starý důkaz níže, pro jistotu.

Pro spor předpokládejme, že taková trojice (A, B, C) neexistuje. Tedy předpokládejme, že pro každé tři selata A, B a C platí: Jestliže sele A porazilo sele B a sele B porazilo C, tak sele A porazilo i sele C.

Definujme funkci f. $f(x) = minM$, kde M je množina všech čísel y takových, že sele x porazilo sele y. Uvažme dvě nejmenší přirozená čísla i a j, které splňují $i < j \wedge f^i(1) = f^j(1)$. (Z Dirichletova principu víme, že taková i, j existují.)

Matematickou indukcí ukážeme, že sele $f^i(1)$ porazilo sele $f^{i+n}(1)$, kde $n \in \mathbb{N}^+ \wedge n < j - i$:

Pro $n = 1$ tvrzení platí, protože $f^{i+1}(1) = f(f^i(1))$, tedy sele $f^{i+1}(1)$ je podle definice f nejmenší sele, které bylo poraženo seletem $f^i(1)$.

Nyní předpokládejme, že sele $f^i(1)$ porazilo $f^{i+n}(1)$ a dokažme, že sele $f^i(1)$ porazilo $f^{i+n+1}(1)$. Jelikož $f^i(1)$ porazilo $f^{i+n}(1)$ a sele $f^{i+n}(1)$ porazilo $f^{i+n+1}(1) = f(f^{i+n}(1))$. Tak sele $f^i(1)$ porazilo i $f^{i+n+1}(1)$. V opačném případě bychom totiž dostali spor s předpokladem a byl by důkaz hotov.

Nakonec uvážíme selata $f^i(1)$, $f^{j-2}(1)$ a $f^{j-1}(1)$. Z předchozí věty víme, že sele $f^i(1)$ porazilo $f^{j-2}(1)$. Dále sele $f^{j-2}(1)$ porazilo $f^{j-1}(1) = f(f^{j-2}(1))$ a také sele $f^{j-1}(1)$ porazilo $f^j(1) = f^i(1)$.

Existuje tedy trojice (A, B, C), která nesplňuje předpoklad, a proto dostáváme spor.

Úloha 1.D. Nechť x, y jsou reálná čísla větší než 1. Ukažte, že

$$\frac{x^3y}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{xy^3}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{4x^2y^2}{x+y}.$$

Řešení. Způsobů, jak dokázat tuto nerovnost, je spoustu, dá se použít např. Cauchy-Schwarzova nerovnost či dokonce Hölderova nerovnost. Ukážeme si ale jednoduché elegantní řešení pouze pomocí ágéčka.

Začneme tím, že nerovnost vydělíme výrazem xy. To můžeme, jelikož x, y jsou reálná čísla větší než 1, tj. jejich součin je kladný. Budeme tedy dokazovat ekvivalentní nerovnost $\frac{x^2}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{4xy}{x+y}$.

Jelikož $x^2 > x^2 - 1$ a obě čísla jsou kladná, máme $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{x}$; stejně tak pro y. Můžeme tedy levou stranu odhadnout zdola: $\frac{x^2}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$. Tenhle výraz můžeme dále odhadnout pomocí AG nerovnosti: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{xy}} = 2\sqrt{xy}$.

Stačí nám tedy dokázat nerovnost $2\sqrt{xy} \geq \frac{4xy}{x+y}$. Tu můžeme ekvivalentně upravit do tvaru $x + y \geq \frac{4xy}{2\sqrt{xy}} = 2\sqrt{xy}$; opět využíváme toho, že x, y jsou kladná. Tato nerovnost ale jistě platí, jelikož je ekvivalentní s $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Zadání 1. série

Úvodní guláš

Termín odeslání: 19. 10. 2020

Text kurzívou není součástí úloh. Nezapomeň se prosím před odesláním úloh zaregistrovat na našich webových stránkách http://brkos.math.muni.cz/.

V Hloupětíně pršelo. Z domku u lesa se kouřilo a zevnitř se ozývaly veselé výkřiky. Bubla totiž zrovna přinesla balíček plný karamelových bonbónů a spustila tím sérii všech možných reakcí.

„Dáte si?"

„No jasně!" přiběhl Ňouma a v těsném závěsu za ním i Kouma.

„Necpi se," žduchnul do Ňoumy.

„Já je nechci, lezou moc za zuby," prohlásila Bubla.

„Já je nerad," zkřivil obličej Matěj.

„A to já si dám," opáčila Liběnka, „Henry, nechceš taky?" Otočila se na shrbeného Henryho, který ani nezdvihnul oči od papírů, které měl před sebou rozložené, a jen zakroutil hlavou.

„Ale já tady byl první, takže bych jich měl dostat nejvíc," prohlásil Ňouma.

„Ne, ne, já chci stejně jako ty!" ohradil se Kouma.

„Nebuď hamižnej!" obořila se na něj Liběnka. Bublu mezitím však něco napadlo a začala rozdávat bonbóny.

Úloha 1.1. Bubla předе všemi rozdělovala karamelové bonbóny mezi Ňoumu, Koumu a Liběnku. Některé z karamelek však ještě rozdala skrytě, aby vyhověla tajným přáním a požadavkům svých přátel. Například, když dala několik karamelek někomu jinému než Ňoumovi, ten pak chtěl tajně dostat dvojnásobek tohoto počtu. Kouma, pokud viděl veřejné obdarování někoho jiného než sebe, si nárokoval skryté předání pouze stejného počtu. Liběnce bylo všechno jedno a nenárokovala si tajně nikdy nic.

Bubla ovšem chvíli před rozdáváním vypila pár sklenek vína a byla ve vcelku rozverné náladě. Proto při veřejném rozdávání karamelek tu a tam někomu pár bonbonů zase sebrala a při dodatečném tajném odebírání jim brala podle stejných pravidel, jako rozdávala.

Jak může Bubla dosáhnout toho, aby měli ostatní každý právě 10 karamelek, má-li jich přesně 30? Žádný ze 4 účastníků předávek samozřejmě nikdy nemůže mít záporný počet karamelek.

Příklad: Bubla dá veřejně 3 karamelky Liběnce, musí tedy skrytě předat další 3 Koumovi a 6 Ňoumovi. Následně odebere 1 Koumovi a musí proto navíc odebrat i 2 Ňoumovi.

„Ještě že jsi to udělala takhle, Bublo, já bych jich asi víc sníst ani nezvládl," smál se Ňouma po tom, co Bubla rozdala všechny bonbóny a on do sebe hodil poslední karamelku.

„Já bych si něco zahrál, aby nám vytrávilo," navrhl Kouma a otočil se na Liběnku.

„Liběnko, přidáš se?"

„Ne, já si radši na chvíli odpočinu," prohlásila karamelkami znavená Liběnka. Henry se mezitím pořád mračil do listu papíru, který držel v ruce.

„Co to je?" zajímala se Bubla.

„Přišlo to dneska ráno z Šanganjosechitinu, podívej.“ Henry se tvářil ustaraně. Kouma s Ňoumou mezitím začali hrát pantomimu a o Bublu s Henrym se moc nezajímali. Po chvíli je ale klasická pantomima přestala bavit, a proto se rozhodli si trošku upravit pravidla.

Úloha 1.2. Kouma a Ňouma hráli pantomimickou hru. Kouma předvedl číslo 1, Ňouma číslo n. Pak opakovaně měnili své číslo vždy na jiného dělitele čísla n tak, že číslo, které předváděli, vynásobili nebo vydělili nějakým prvočinitelem čísla n. Toto prováděli zaráz. Pro která n se může stát, že v jednu chvíli předvádí stejné číslo?

Ňouma se zrovna s Koumou hádal o tom, že jeho provedení písmene n bylo mnohem hezčí než Koumovo a že by měl dostat bod navíc. Zamyšlený Henry se pořád ještě mračil na příchozí dopis a jejich dohadováním byl otrávený.

„Můžete být laskavě chvíli potichu?“ zabručel.

„Co tam máš tak důležitého, že se ani neusměješ?“ zajímal se Kouma.

„Prospělo by ti si s námi něco zahrát. Třeba by ses netvářil pořád tak kysele,“ přidal se Ňouma.

„Nebo třeba pouštět draky, koukej, už neprší.“

„To je pravda, fouká dokonce vítr. Uděláme si nějakého?“

„Tady jich ještě spousta zbylo,“ zamyslela se Liběnka a odkudsi donesla krabici plnou papírových draků.

„A draci mají tvar krááásných deltoidů, to by se ti mohlo líbit.“

Úloha 1.3. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid právě tehdy, když $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník a zároveň jeho úhlopříčky AC a BD jsou na sebe kolmé.

Henry jim ale jen mlčky podal dopis, který držel v ruce. Liběnka se pro něj natáhla a začala číst nahlas.

„Drazí přátelé,“ stálo tam, „prosím vás o urychlenou pomoc. Šanganjosechitin je v nouzi. Bohužel nemohu v dopise napsat víc, vše vám sdělím osobně. Prosím, okamžitě jakmile to bude možné, přijeďte. S úctou, José. P. S. Nehlaďte malá roztomilá zvířátka.“

„To je dost divný dopis,“ ozval se Matěj, který byl do té doby potichu a do rozhovoru se nezapojoval. „Co to má znamenat, nehlaďte zvířátka?“

V hlavě se jim všem vynořily vzpomínky na poslední návštěvu Šanganjosechitinu a v místnosti zavládlo ticho. Ňouma nervózně zašoupal nohama. „Mohlo by to být nebezpečný.“

„Co by na tom mohlo být asi tak nebezpečnýho?“ vysmál se mu Kouma.

„Úplně cokoliv,“ pokrčil rameny.

„Bojíš se, že tě třeba nějaké malinké zvířátko sežere?“ dobíral si ho dál Kouma.

„Ty jsi tupej!“

„Ty víc!“

„Ty jsi tupej, jak úhly v tomhle čtyřúhelníku!“

Úloha 1.4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník takový, že úhly ABC a BCD jsou tupé. Označme P průsečík přímek AB a CD. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku APD. Nechť E, F jsou takové body na k, že body E, B, C, F leží na jedné přímce v tomto pořadí. A nakonec označme G průsečík přímky AB s osou úhlu BEA a H průsečík přímky CD s osou úhlu CFD. Ukažte, že body E, F, G a H leží na jedné kružnici.

„Vy se prostě dneska musíte pořád hádat," postěžovala si Bubla.

„Já se nehádám, to on se hádá." Kouma už se nadechoval s odpovědí, ale Matěj je rychle přerušil. „Pojedeme tam?"

„Měli bychom," řekla po chvilce přemýšlení Bubla a ostatní začali přikyvovat.

„Můžeme alespoň k cestování využít náš teleport," prohlásil Henry.

„A bude to fungovat?" zvedl obočí Matěj.

„Měl by. Udělal jsem nějaké úpravy."

„A jak to teda funguje?"

„Nyní by měla stačit zadat jen trojice prvočísel."

„Potřebuju se jenom sbalit," prohlásila Liběnka, „mezitím to můžete nachystat."

Liběnka rychle odkráčela a ostatní se sklonili nad přístrojem. Kódem nutným k použití teleportu byla jedna z těchto trojic čísel:

Úloha 1.A. Najděte všechny trojice prvočísel p, q, r vyhovující rovnosti $\frac{7}{p}+\frac{11}{q}+\frac{13}{r}=10$.

„Připraveni?" zeptal se Henry a zhluboka se nadechnul. Pevně zavřel oči a zmáčknul knoflík. Objevil se záblesk a všemi v místnosti to trhnulo. Za malou chvíli se octli na čemsi, co vypadalo jako nějaké hřiště pro psy.

„Jsme někde úplně jinde, než jsme měli být," zkonstatoval Matěj.

„Nepovídej," odsekl rozladěný Henry a sklonil se nad teleportem.

„Tak tohle bylo naposledy, co jsem tímhle cestovala," řekla uraženě Liběnka a kontrolovala si koleno, ze kterého jí tekla krev, „nikdy to ještě nefungovalo tak, jak má."

„Nějak se to rozpadlo," povzdechl si Henry a zvedl jeden z několika kusů pláště stroje.

„Jak to patří? Nechybí tomu něco?" snažila se Bubla. Henry se zamyšleně poškrábal po hlavě a sebral pět kusů z vrchní části stroje.

Úloha 1.B. Rozhodněte, zda lze pokrýt obdélník 5×4 všemi pěti různými (neshodnými) tetrominy (souvislé objekty sestávající ze čtyř jednotkových čtverců).

„Co je zase tohle?" vyprskl smíchy Kouma. Dáma stojící poblíž se na něj nechápavě otočila.

„Co by bylo? Za malou chvilku začíná turnaj a my nesmíme promarnit ani chvilku, kterou bychom mohli využít k přípravě."

„Jakého turnaje?" nechápal Matěj.

„Přece v prasečích agility," opáčila dáma tónem, který naznačoval, že to je ta nejsamozřejmější věc na světě.

Úloha 1.C. Prasečí agility se hodnotí na základě času, za který dané sele proběhne překážkovou dráhou. Soupeří proti sobě vždy dvojice. Posledního turnaje se účastnila alespoň 3 selata. Každé soupeří s každým (jiným) právě jednou a víme, že každé sele nakonec alespoň jednou vyhrálo (remízy nebyly). Dokažte, že existuje trojice selat A, B, C taková, že A vyhrál nad B, B nad C a C nad A.

Selátka zmateně pobíhala a zvonky na jejich krčcích vydávaly ohlušující zvuk.

„A to tady děláte běžně. . . ?" zeptala se opatrně Liběnka.

„Prasečí agility mají v Šanganjosechitinu velkou tradici-" začala trochu uraženě dáma.

„Počkejte, my jsme v Šanganjosechitinu?" skočil jí do řeči Henry.

„No, samozřejmě,“ zarazila se trošku, „tedy na jeho okraji.“ Henry se rozzářil a rozběhl se k teleportu. „Pojďte sem, už vím, v čem byla chyba.“ Vzal kompas, mapu a poznámkový blok a něco do něj začal rychle škrábat. Jednou z věcí, které do bloku načmáral, byl důkaz této nerovnosti:

Úloha 1.D. Nechť x, y jsou reálná čísla větší než 1. Ukažte, že

$$\frac{x^3y}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{xy^3}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{4x^2y^2}{x+y}.$$

Ňouma mezitím šel za selátky a jedno vzal do náručí. „Ta jsou ale roztomilá… jestlipak bys umělo vyklepávat prvočísla?“ zkoumavě na něj pohlédl.

Henry už všechny svolal, odhodlán dokázat funkčnost svého vynálezu. „Byla to jen malá odchylka. Nezadali jsme přesné souřadnice, kam do Šanganjosechitinu jsme chtěli dojet,“ vysvětloval rychle.

„Ňoumo, čekáme už jen na tebe,“ povzdechl si Matěj a otočil se na Ňoumu. „Ňoumo, mohl bys jít za námi?“ Odpověď nepřišla. „Co je to s tebou?“

„Ňoumo?!“ Odpovědí jim bylo žalostné zakvičení. Všichni se nevěřícně podívali směrem, odkud zakvičení vycházelo.

„Proboha,“ zalapala po dechu Liběnka, „tak tohle myslel pan José tím dopisem.“

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`