Řešení 6. série

Velké věty

Úloha 6.1. Vyřešte rovnici $a^4 - 8^b = 16$ v oboru přirozených čísel.

Řešení. Ukážeme, že rovnice nemá řešení. Předpokládejme pro spor, že existují $a, b \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a^4 - 8^b = 16.$$

Pak a^4 lze napsat jako součet dvou sudých čísel, takže se jedná o sudé číslo. Což znamená, že $a = 2k$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$, rovnice tedy přejde do tvaru $16k^4 - 8^b = 16$. No ale to znamená, že 8^b lze zapsat jako rozdíl dvou čísel dělitelných 16, takže se musí jednat o číslo dělitelné 16, což nám dává, že $b \geq 2$. Nyní můžeme celou rovnici podělit 16, získáme:

$$k^4 - 2^{3b-4} = 1.$$

Jelikož $3b - 4 \geq 2$, tak podle Catalanovy věty může mít tato rovnice jediné řešení $a^4 = 9, 3b - 4 = 2$, no ale to je spor, protože by to znamenalo, že $a = \sqrt{3}$, což určitě není přirozené číslo.

Úloha 6.2. Rovnice na přístroji vypadala takto: Nechť $k, l \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že rovnice $x^2 - 2k^2x - l^4 = 0$ má nezáporné celočíselné řešení a. Ukažte, že $a - k^2$ není druhá mocnina žádného celého čísla.

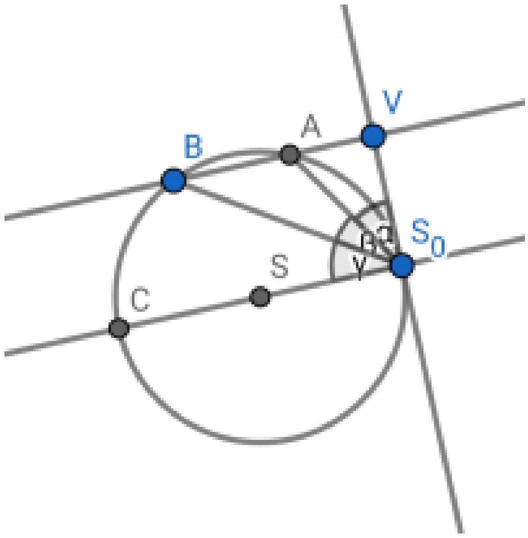
Řešení. Úlohu vyřešíme sporem. Předpokládejme, že platí $a - k^2 = n^2$ pro nějaké celé číslo n. Tedy $a = n^2 + k^2$ je řešením rovnice ze zadání a můžeme v ní za x dosadit a: dostaneme

$$0 = (n^2 + k^2)^2 - 2k^2(n^2 + k^2) - l^4 = n^4 - k^4 - l^4.$$

To nám ovšem dává $k^4 + l^4 = n^4$, což je ve sporu s Velkou Fermatovou větou.

Úloha 6.3. Necht přímky p a q svírají v bode V pravý úhel. Zvolme bod S takový, že jeho kolmý průmět S_0 na p a nějaké další dva body A, B na q jsou od S stejně daleko, čili $|SS_0| = |SA| = |SB|$. Označme α, β, γ po řadě úhly VS_0A, AS_0B, BS_0S. (Předpokládejme, že B je od V dál než A). Dokažte, že úhel α lze euklidovskou konstrukcí roztřetit (tj. sestrojit pomocí pravítka a kružítka úhel třetinové velikosti) právě tehdy, když lze roztřetit úhel β a ten lze roztřetit, právě když lze roztřetit úhel γ. Jinými slovy, dokažte, že lze roztřetit buď všechny úhly, nebo žádný.

Řešení.



Platí:

$$\begin{aligned} 2\alpha \text{ (úsekový)} &= 2 \cdot |\sphericalangle ACS_0| \text{ (obvodový)} \\ &= |\sphericalangle ASS_0| \text{ (středový)} \\ &= |\sphericalangle BAS| \text{ (střídavý)} \\ &= |\sphericalangle ABS| \text{ (rovnoramenný)} \\ &= |\sphericalangle CSB| \text{ (střídavý)} \\ &= 2\gamma \text{ (obvodový)}. \end{aligned}$$

Dále pak $2\alpha + \beta = \alpha + \beta + \gamma = 90°$, což znamená

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\alpha &= \frac{1}{3}\gamma = 15° - \frac{1}{6}\beta, \\ \frac{1}{3}\beta &= 30° - \frac{2}{3}\gamma \end{aligned}$$

Dokážeme půlit i zdvojnásobit úhel a stejně tak sestrojit 15° (např. jako polovina poloviny 60°) a 30°. Dokážeme taky sčítat i odčítat úhly. Pokud tedy dokážeme sestrojit jeden z úhlů α, β, γ, dokážeme sestrojit i ty ostatní.

Úloha 6.4. V zemi Šanganjosechitin se nacházelo několik měst. Některé dvojice měst byly propojeny cestou tak, že se žádné dvě cesty nekříží a z každého města se lze po těchto cestách dostat do všech ostatních. José se rozhodnul dopravní síť zefektivnit. Proto z některých cest postavil rychlobruslařskou dráhu, po které se jezdilo rychleji. Protože byla ovšem přestavba drahá, rozhodl se přestavět co nejmenší počet cest tak, aby se po nově vzniklých bruslařských drahách opět šlo dostat z libovolného města do libovolného jiného.

Pro fungování bruslařských drah bylo nutné, aby se v některých městech postavily ochlazovátory. Kvůli úspoře peněz (a špatné ekonomické situaci v Šanganjosechitinu) musely být ochlazovátory postaveny nejvýše v polovině měst. Existují různé modely ochlazovátorů, ty se liší v barvě nebo typu konstrukce (mohou v obojím).

Aby se stejné ochlazovátory neshlukovaly a nepřehřívaly, bylo nutné, aby každé dva ochlazovátory, které sdílí cestu nebo bruslařskou trať, měly různý typ konstrukce.

Zároveň kvůli přehlednosti značení bylo třeba, aby pro každé město m, které neobsahovalo ochlazovátor, existovala barva b taková, že bude existovat právě jedno město obsahující ochlazovátor barvy b a propojené s m pomocí bruslařské dráhy.

Určete nejmenší počet modelů, který stačil pro libovolnou mapu měst, cest a rychlobruslařských tratí.

Řešení. Ukážeme, že existuje mapa, pro kterou nevyhovuje žádný počet modelů. Uvažme mapu, která obsahuje jediné město. Pak tato mapa splňuje podmínky ze zadání, ale zřejmě v ní nelze rozmístit ochlazovače. Jediné město totiž nemůže obsahovat ochlazovač (existoval by nadpoloviční počet ochlazovačů), a pokud ho neobsahuje, pak naopak nemá ochlazovač za souseda. Proto tuto mapu nejde pokrýt s libovolným množstvím modelů.

Zvědavý řešitel ovšem v úloze mohl najít zajímavé úvahy zahrnující větu o čtyřech barvách z pomocného textu. Například lze indukcí vzhledem k velikosti mapy ukázat, že na každou mapu, která obsahuje aspoň dvě města, lze umístit ochlazovače stejné barvy nejvýše do poloviny měst tak, aby každé město bez ochlazovače sousedilo přes dráhu právě s jedním ochlazovačem. Podle věty o 4 barvách jim lze následně přidělit 4 typy konstrukce tak, aby sousední ochlazovače měly různé konstrukce.

Úloha 6.A. Úplný ciferný součet racionálního čísla s konečným desetinným rozvojem je operace, kde děláme ciferný součet ciferného součtu ciferného součtu... dokud nedojdeme k jednocifernému číslu: např. $1498 \mapsto 1+4+9+8 = 22 \mapsto 2+2 = 4$ nebo $22,5 \mapsto 2+2+5 = 9$ (tzn. nebereme ohled na desetinnou čárku). Dokažte, že úplný ciferný součet čísla 360 a každého jeho 2n-násobku (pro n celé) je 9.

Řešení. Pro jednoduchost můžeme rozdělit úlohu na dva případy:

- $n \geq 0$. Podle pravidla pro dělitelnost devíti víme, že ciferný součet zachovává dělitelnost devíti [1]. Protože je $n \geq 0$, $2^n \in \mathbb{N}$ a můžeme opakovaně aplikovat ciferný součet, dostáváme pořád čísla dělitelná devíti. Tím dostáváme klesající posloupnost přirozených čísel, která se tedy nutně někdy zastaví a my konkrétně víme, že se zastaví na čísle 9. To proto, že ciferný součet přirozeného čísla je větší než 0.
- $n < 0$. V tomto případě si můžeme uvědomit, že dělení dvěma je to stejné jako násobení 5 a dělení 10. Proto můžeme $360 \cdot 2^n$ přepsat na $\frac{360 \cdot 10^n}{5^n} = \frac{360 \cdot 5^{-n}}{10^{-n}}$. Protože dělení ani násobení deseti nemění ciferný součet, zajímá nás pouze ciferný součet

[1] dokonce zachovává zbytek po dělení devíti

čísla $360 \cdot 5^{-n}$. Díky tomu, že teď je $-n$ kladné číslo, můžeme dokončit důkaz úplně stejně jako v předchozím případě. $5^{-n} \in \mathbb{N}$, a proto je $360 \cdot 5^{-n}$ dělitelné devití, můžeme na toto číslo opakovaně aplikovat ciferný součet a dostat se na devítku.

Úloha 6.B. Ve vesmíru je soustava čtyř planet s poloměrem 1, které se dotýkají jako na obrázku. Chlápek žije na jednom pólu jedné planety (nejvyšší bod). Chce natřít co největší povrch všech 4 planet, ale zvládne ujít vždy jen určitou vzdálenost d, po které se musí nacházet zase doma, než vyrazí znovu natírat. Jaká je vzdálenost d, jestliže nenatřený povrch poté, co Chlápek natřel všechny dosažitelné body, odpovídá svojí rozlohou povrchu jedné planety?

Řešení. Budeme uvažovat jen cestu tam a výsledek na konci zdvojnásobíme, abychom započítali i cestu zpátky.

Vzdálenost, kterou může chlápek ujít (označme l), budeme postupně zvětšovat z nuly. Tím se bude postupně zvětšovat i plocha, kterou může pokreslit. Jakmile bude tato plocha poprvé rovná ploše tří koulí, budeme vědět, že daná vzdálenost je prvním řešením. Žádná menší vzdálenost tedy není řešením. Pokud bychom ale vzdálenost ještě více zvětšili, zvětšila by se i plocha. Žádné jiné řešení tedy neexistuje.

Nejprve uvažme l od 0 do $\frac{\pi}{2}$. V tom případě chlápek neopustí růžovou planetu, protože k bodu dotyku s modrou nebo se žlutou planetou je to $\frac{\pi}{2}$. Zůstane tedy pouze na horní polokouli růžové koule a jistě tedy nepokreslí plochu tří koulí. Proto je l větší než $\frac{\pi}{2}$.

Nyní uvažme l od $\frac{\pi}{2}$ do π. V tomto intervalu se již dostane na celou růžovou kouli a na polokoule žluté a modré koule přilehlé k růžové kouli. Na černou kouli se nedostane (to by potřeboval víc než π). Celkem tedy pokreslí nejvýše plochu dvou koulí (pro $l = \pi$ přesně), což nestačí. Proto je l větší než π.

Pozorný čtenář si jistě všimnul, že jako hranice uvažovaných intervalů jsme účelově volili vzdálenosti, které chlápek potřebuje k tomu, aby se dostal na novou kouli. Ve třetím intervalu se ale už dostane na všechny čtyři koule, je tedy potřeba se zamyslet, jakou horní hranici uvažovat. Nabízí se $\frac{3\pi}{2}$, protože pak bude interval opět délky $\frac{\pi}{2}$.

Pro $l = \frac{3\pi}{2}$ chlápek pokreslí nejen celou růžovou kouli, ale i celou modrou a žlutou. Navíc se ale dostane i na černou kouli a celkem tedy pokreslí plochu větší než je plocha tří koulí. Víme tedy, že l leží v intervalu $(\pi; \frac{3\pi}{2})$.

Najít bod, kdy je pokreslená plocha rovna přesně ploše tří koulí, můžeme třeba metodou půlení intervalu. Podíváme se na prostřední bod intervalu. Vyhovuje-li, máme vyhráno. Jinak se podíváme do pravé nebo levé půlky podle toho, jestli byla plocha menší nebo větší a proces opakujeme.

Půlka intervalu je $\frac{5\pi}{4}$. Víme, že pro $l = \pi$, chlápek pokreslí dvě koule. Na modré (či žluté) kouli pokreslí celou polokouli přilehlou k růžové kouli. Do druhé polokoule se tedy může dostat dalších $\frac{\pi}{4}$. Nepokreslený tedy zůstane kulový vrchlík (povrch kulové výseče) se středovým úhlem $\frac{\pi}{2}$ (z obou stran jsme „uřízli“ $\frac{\pi}{4}$).

K černé kouli je vzdálenost π. Zbývá nám tedy opět $\frac{\pi}{4}$. Tím se pokreslí jeden vrchlík z modré koule a jeden ze žluté. Oba vrchlíky se dotknou, ale neprotnou se.

Nyní si stačí jen všimnout, že vrchlík chybějící na modré kouli je stejně velký jako vrchlík na černé kouli přilehlý k modré kouli, což dá dohromady polokouli. Na žluté kouli je situace symetrická. Tyto dvě polokoule tedy spolu s dvěma dříve pokreslenými koulemi dají plochu tří koulí. Navíc se jedná o jediné řešení (viz výše).

Hledaná hodnota d tedy je $2l = \frac{5\pi}{2} = 2,5\pi$.

Úloha 6.C. Jedna z Koumových otázek zněla takto: Dokažte, že pokud pro čtyřúhelník $ABCD$ platí, že AB je kolmé na CD a BC je kolmé na AD, pak i AC je kolmé na BD.

Řešení. Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřúhelník. Uvažme trojúhelník ABC. Jelikož AB je kolmé na CD, leží bod D na výšce na stranu AB. Jelikož BC je kolmé na AD, leží bod D i na výšce na stranu BC. Ovšem my víme, že všechny tři výšky v trojúhelníku se protínají v jediném bodě, tedy bod D leží i na výšce na stranu AC. Proto AC je kolmé na BD.

Úloha 6.D. Šanganjosechitinská vlajka má tvar (libovolného) trojúhelníku. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníku, který ji tvoří. Ukažte, že

$$(a+b+c)^4 + 16(a^2+b^2-c^2)^2 \geq 64a^2b^2$$

.

Řešení. Úlohu lze řešit mnoha způsoby, ukážu dva (které jsou nejvíc geometrické): odvození nerovnosti pomocí Heronova vzorce (tak mě úloha napadla) a důkaz pomocí kosinové věty.

1. řešení. Znáte Heronův vzorec? Pokud ne, je to chyba! Není sice vůbec užitečný, ale je velmi hezký: říká nám, jak můžeme elegantně vyjádřit obsah trojúhelníka pouze pomocí jeho stran. Máme-li tedy trojúhelník ABC o stranách a, b, c a označíme-li si $s = \frac{a+b+c}{2}$, Heronův vzorec nám říká, že obsah našeho trojúhelníka je roven

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Použijme nyní AG nerovnost: podle ní $s+(s-a)+(s-b)+(s-c) \geq 4\sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Levou stranu můžu upravit na $4s - 2s = 2s$, tedy po úpravě

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &\geq 256s(s-a)(s-b)(s-c)\\ &= 16(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\\ &= 16(2ab + (a^2+b^2-c^2))(2ab - (a^2+b^2-c^2))\\ &= 64a^2b^2 - 16(a^2+b^2-c^2)^2.\end{aligned}$$

Po cestě jsme nepoužili nic jiného než vzorec pro rozdíl dvou čtverců a na konci jsme dorazili k nerovnosti ze zadání.

2. řešení. Využijeme kosinovou větu: všimněme si, že $a^2 + b^2 - c^2$ se podle ní rovná $2ab\cos\alpha$, kde α je úhel, který strany a a b svírají. Dosazením do naší nerovnosti a úpravou získáme: $0 \leq (a+b+c)^4 + 16(2ab\cos\alpha)^2 - 64a^2b^2 = (a+b+c)^4 + 64a^2b^2(\cos^2\alpha - 1) = (a+b+c)^4 - (16ab\sin\alpha)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+8ab\sin\alpha)(16ab\sin\alpha)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-8ab\sin\alpha)$. To je tedy nerovnost ekvivalentní té původní. Všimněme si navíc, že první závorka je kladná, tedy nám stačí dokázat nerovnost $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 8ab\sin\alpha$.

To se nám podaří snadno pomocí obsahů. Označme si obsah našeho trojúhelníka jako S. Víme, že $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, tedy pravá strana nerovnosti je rovna $16S$. Dále víme, že $S = \frac{1}{2}av_a = bv_b = cv_c$, kde $v_{a,b,c}$ jsou výšky na příslušné strany. Je jasné, že $b, c \geq v_a, a, c \geq v_b, a, b \geq v_c$, a proto můžeme odhadnout $2ab+2bc+2ca \geq 4S+4S+4S = 12S$. Dále můžeme sečtením tří AG nerovností odhadnout $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}((a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)) \geq ab + bc + ca \geq 2S + 2S + 2S = 6S$. Celkem je tudíž levá strana nerovnosti větší nebo rovna osmnácti obsahům, zatímco pravá je rovna právě šestnácti. Tím je úloha vyřešena.