Řešení 5. série

Geometrie

Úloha 5.1. Drzoun a Zrzoun chtějí přesně zreplikovat kruhový modul. Drzoun stojí u originálu pouze s pravítkem a tužkou (čili dokáže kreslit body, čáry, ne kružnice, a dokonce měřit vzdálenosti dvou bodů) a rozměry hlásí Zrzounovi, který má k dispozici pravítko, tužku a kružítko. Navrhněte, jak modul ve tvaru kružnice změřit, pokud není znám střed ani poloměr.

Řešení. Drzoun si vybere tři různé body na kružnici. Tyto tři body tvoří trojúhelník. Drzoun změří jeho strany a nahlásí jejich rozměry Zrzounovi.

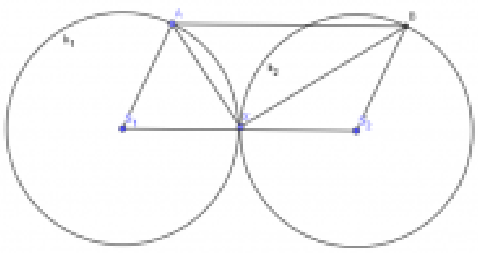
Zrzoun sestrojí trojúhelník podle věty *sss*. (Narýsuje stranu a. V bodě B sestrojí kružnici k o poloměru b. V bodě C sestrojí kružnici l o poloměru c. Bod A bude pak jeden z průsečíků kružnic k a l.)

Poté Zrzoun sestrojí kružnici opsanou trojúhelníku $\triangle ABC$ se středem S. (Sestrojí osy úseček AB a BC. Průsečík os je střed kružnice S.)

Poloměr získáme například jako úsečku SA.

Úloha 5.2. Dvě různé kružnice k_1,k_2 mají stejný poloměr a dotýkají se v bodě X. Označme jejich středy popořadě S_1,S_2 a uvažujme libovolný bod A na kružnici k_1. Na kružnici k_2 pak máme jediný bod B takový, že úsečky AB, S_1S_2 jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Ukažte, že úhel AXB je vždy pravý.

Řešení. Jelikož kružnice k_1 a k_2 mají stejný poloměr, platí $|S_1A| = |S_2B|$. Zadání také říká, že $|S_1S_2| = |AB|$, takže čtyřúhelník S_1S_2BA je kosodélník. Z vlastností kosodélníku vyplývá $|\measuredangle AS_1S_2| + |\measuredangle S_1S_2B| = 180°$. Dále víme, že S_1A a S_1X jsou poloměry kružnice a tedy $|\measuredangle S_1XA| = |\measuredangle S_1AX|$.



Nyní už můžeme dopočítat úhel AXB:

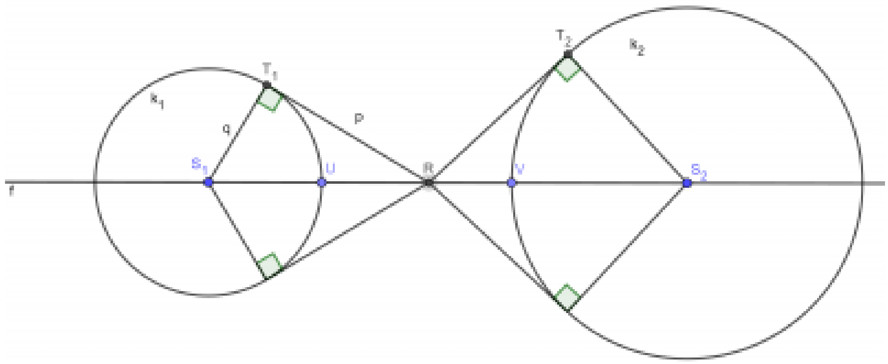
$$|\measuredangle AXB| = 180° - \left(\frac{180 - |\measuredangle AS_1S_2|}{2} + \frac{180 - |\measuredangle S_1S_2X|}{2} \right)$$

BRKOS Team 2020

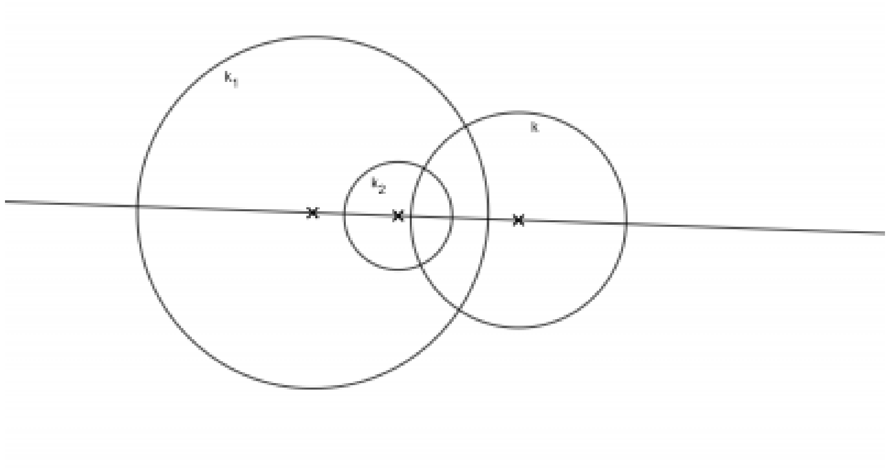
$$|\measuredangle AXB| = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \frac{|\measuredangle AS_1S_2| + |\measuredangle S_1S_2B|}{2} = 90^\circ.$$

Úloha 5.3. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2, které se neprotínají ani nedotýkají. Najděte kružnici l se středem R ležícím na přímce S_1S_2 takovou, že protíná každou z kružnic k_1,k_2 ve dvou bodech a v každém z průsečíků jsou tečny k oběma kružnicím navzájem kolmé.

Řešení. První detail, který bohužel nebyl upřesněn v zadání, je, že pro $S_1 = S_2$ úloha nedává smysl. Takže předpokládejme, že $S_1 \neq S_2$ a předpokládejme, že existuje požadovaná kružnice l. Označme T_1 jeden z průsečíků l s k_1 a podobně T_2 jeden z průsečíků s k_2 (vzhledem k symetrii ty druhé průsečíky potřebovat nebudeme). Uvažme tečny v bodě T_1 – p na kružnici k_1 a q na kružnici l. Podle zadání jsou na sebe kolmé, ale jelikož je i poloměr k_1 od středu k T_1 kolmý na p, tak platí, že tento poloměr a q jsou oboje přímky procházející bodem T_1, které jsou kolmé na q – musí se tedy jednat o totožné přímky. Dohromady jsme ukázali, že bod S_1 leží na q. Analogicky by se ukázalo, že S_2 leží na p. Trojúhelník S_1T_1R je proto pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu T_1. Analogicky by se ukázalo, že S_2T_2R je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu T_2.



Nyní označme r_1, r_2 a r po řadě poloměry kružnic k_1, k_2 a k. Navíc označme $x = |S_1R|$ a $y = |RS_2|$, přičemž tyto vzdálenosti budeme brát orientovaně. Tedy pokud budeme předpokládat, že S_1 leží více nalevo, než S_2 (což BÚNO můžeme), tak pokud bude ležet bod R mezi S_1 a S_2 (jako na obrázku nahoře), tak budou obě hodnoty kladné, ale pokud bude S_2 mezi R a S_1 (jako na obrázku níže), tak bude y záporné. x bude vždy kladné. Důvod, proč to děláme je ten, že nyní v obou případech platí $x+y = |S_1S_2|$. Pokud vám to ale přijde matoucí, tak všechny poznámky o orientaci ignorujte a za domácí úkol příklad dořešte rozebráním druhého případu zvlášť :)



Podle Pythagorovy věty pro trojúhelníky S_1T_1R a S_2T_2R dostáváme:

$$r_1^2 + r^2 = x^2, r_2^2 + r^2 = y^2.$$

Porovnáním pak dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2 - r_1^2 &= y^2 - r_2^2, \\ (x-y)(x+y) &= r_1^2 - r_2^2 \\ x - y &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{x+y} = \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{|S_1S_2|} \end{aligned}$$

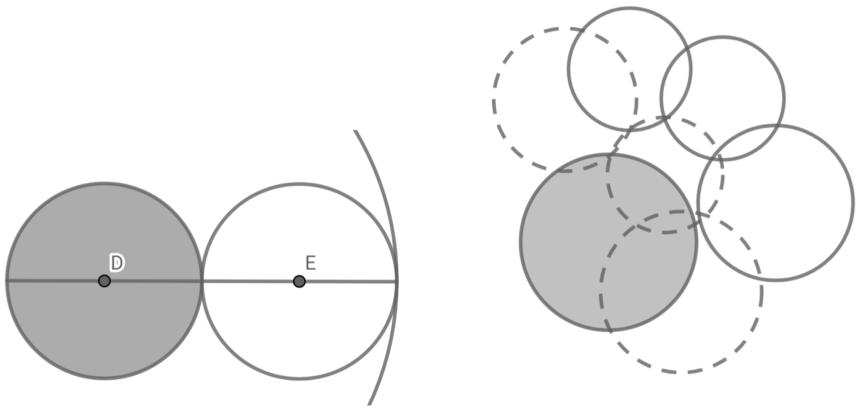
Ukážeme, že $x - y$ zvládneme sestrojit. Jelikož všechny hodnoty na pravé straně známe, tak ty určitě sestrojit můžeme. Uvažme nyní libovolný trojúhelník, který má dvě strany o délce $r_1 - r_2$ a $|S_1S_2|$ (třetí má libovolnou). Nyní sestrojme podobný trojúhelník takový, že straně o délce $|S_1S_2|$ odpovídá strana o délce $r_1 + r_2$ (naneseme tuto vzdálenost na stranu, které má odpovídat a sestrojíme rovnoběžky s dalšími dvěma stranami, tam, kde se protnou, je třetí vrchol trojúhelníka). Uvažme stranu, která odpovídala straně o délce $r_1 - r_2$ – z podobnosti víme, že má délku $\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}{|S_1S_2|}$.

Nyní, když máme $x-y$, tak můžeme sestrojit úsečku o délce x jako délku půlky úsečky, která vznikne tak, že za sebe dáme úsečky o délkách $x - y$ a $x + y$ (nezapomeňte, že mohou být opačně orientované, a pak je třeba je naopak odečítat). Nyní stačí najít R jako bod na polopřímce $\overrightarrow{S_1S_2}$ ve vzdálenosti x od S_1 (pokud by x bylo záporné, tak se bod ve skutečnosti objeví na opačné polopřímce). Sestrojením Thaletovy kružnice nad RS_1 pak získáme její průsečíky P_1, P_2 s k_1. k narýsujeme jako kružnici se středem R a poloměrem $|RP_1|$. Vzhledem k tomu, kde jsme R sestrojili víme, že se tato kružnice protne i s k_2 a že tečny ve všech průsečících na sebe budou opravdu kolmé.

Úloha 5.4. Liběnka namalovala na tabuli bazmek a Kouma s Ňoumou, protože netušili, co to bazmek je, jej raději náhodně polepili konečně mnoha kruhovými samolepkami různých velikostí. Liběnka jim pak rozčíleně nakázala, ať některé odlepí alespoň tak, aby zbylé nalepené byly po dvou disjunktní (žádné se nepřekrývali, a to ani bodem). Kouma s Ňoumou na Liběnku však vyzráli, neboť kruhy nebyly pouze samolepící, nýbrž i samonafukovací. Po odlepení se tedy každá zbylá nalepená samolepka n-krát zvětšila ze svého středu, takže opět pokrývají celý bazmek. Pro které nejmenší reálné n si Kouma s Ňoumou vždy mohou vybrat, které nalepené po dvou disjunktní samolepky zachovat, aby po nafouknutí opět pokrývaly celý Bazmek? Dokažte.

Řešení. Řešení je $n = 3$, našim cílem je odargumentovat jednak, proč n nemůže být menší, čili najít příklad, kde pro menší n úloha selhává, a jednak, proč nemůže být větší, čili najít pro každé pokrytí nějaké podpokrytí, které je vhodné pro $n = 3$.

Krajním příkladem je např. úsečka délky 4 pokrytá dvěma kruhy o poloměru 1 (viz obrázek). Oba kruhy zachovat nemůžeme, ale ať odstraníme jakýkoli, ten druhý se pak bude muset zvětšit alespoň třikrát (tzn. na poloměr 3).



Více to ale není, jelikož nám $n = 3$ vždy stačí, což dokážeme matematickou indukcí. Uvažme nějakou množinu bodů pokrytou k kruhy.

Pro $k = 1$ je případ triviální (jeden kruh, který musíme vybrat).

Předpokládejme, že pro množinu pokrytou k kruhy dokážeme vybrat některé kruhy tak, aby při jejich $n-$násobném zvětšení pokrývali opět celou množinu. Máme-li množinu pokrytou $k + 1$ kruhy, vyberme z nich ten největší (označme ho K) a odstraňme všechny, které jej protínají nebo se jej dotýkají. Zvětšíme-li poloměr r kruhu K třikrát, pokryje určitě celou oblast, jež pokrývaly kruhy, které jsme odstranili (jejich průměr byl totiž nejvýše $2r$ a my jsme poloměr K zvětšili přesně o $2r$). Zbylá oblast je pokryta jistě méně než $k + 1$ kruhy, tedy nejvýše k, tudíž můžeme uplatnit indukční předpoklad a máme hotovo.

Úloha 5.A. Nechť K,L jsou kruhy, které mají společný vnější dotyk. Nechť obsah K je πn a obsah L je πm, kde m, n jsou přirozená čísla. Jaký je nejmenší přirozený poloměr takový, že existuje kruh s tímto poloměrem, který zakryje oba původní kruhy?

Řešení. Ze vzorce na výpočet obsahu kruhu vidíme, že uvažované kruhy mají poloměry $\sqrt{m}, \sqrt{n}$. Aby kruh překryl oba naše kruhy, musí mít průměr aspoň tolik, kolik je součet jejich průměrů, tj. $2(\sqrt{m} + \sqrt{n})$. Hledaný poloměr je tedy nejmenší celé číslo větší než $\sqrt{m} + \sqrt{n}$; tedy horní celá část tohoto výrazu.

Úloha 5.B. Mějme n obdélníkových dílků o rozměrech 1×1, 1×2,... až $1 \times n$. Pro která přirozená n lze z těchto dílků seskládat kompletní čtverec?

Řešení. Nejdelší obdélník má délku n, hrana čtverce tedy musí mít délku alespoň n, aby se do něj vešel. Jeho obsah je tedy alespoň n^2. Součet obsahů obdélníků je $1+2+\cdots+n$, což se podle vzorce pro součet aritmetické posloupnosti rovná $\frac{n(n+1)}{2}$. Aby mohly tvořit čtverec, musí tato hodnota být alespoň n^2. Tedy po úpravě vidíme, že musí platit $n^2 + n \geq 2n^2$, tedy $n \geq n^2$, což pro kladné reálné číslo znamená $1 \geq n$. Číslo n je ale navíc přirozené, proto jediné vyhovující n je rovno 1.

Úloha 5.C. Kód je možné zjistit po vyřešení následující rovnice: v oboru přirozených čísel řešte rovnici $13 \cdot \mathrm{NSD}(x, y, z) + 3 \cdot \mathrm{nsn}(x, y, z) = xyz$, kde NSD značí největší společný dělitel a nsn značí nejmenší společný násobek.

Řešení. Označme si $n = \mathrm{nsn}(x, y, z)$ a $D = \mathrm{NSD}(x, y, z)$.

Protože n dělí xyz i $3n$, musí dělit také $13D$. Víme, že $D|n$, tedy $n = k \cdot D$. Z toho $k \cdot D|13 \cdot D$, a tedy $k|13$. Jelikož je k přirozené číslo, musí platit jedna z možností:

1. $k = 1$. V tomto případě $n = D$ a proto $x = y = z$, z čehož plyne, že $n = x$. Pak vyřešením jednoduché rovnice $13x + 3x = x^3$ (poznamenejme, že $x \in \mathbb{N}$, a proto $x > 0$) získáme $x = 4$. Jedním řešením je tedy trojice (4, 4, 4).
2. $k = 13$. V tomto případě $n = 13D$. Číslo 13 tedy musí dělit alespoň jedno z čísel x, y, z, ale ne všechny tři zároveň. Musí tedy platit jedna ze dvou možností:
   - $x = y = 13z$. (Máme tedy čísla $(13z, 13z, z)$) Dosazením do zadání získáme $13z + 3 \cdot 13z = 169z^3$, z čehož získáváme, že $4 = 13z^2$, což nemá v přirozených číslech řešení.
   - $x = 13y = 13z$. (Máme tedy čísla $(13z, z, z)$). Dosazením získáme $13z + 3 \cdot 13z = 13z^3$, z toho $4 = z^2$ a proto máme nové řešení $(26, 2, 2)$ (a všechny jeho permutace).

Všechna řešení rovnice jsou tedy $(4, 4, 4), (26, 2, 2), (2, 26, 2), (2, 2, 26)$.

Úloha 5.D. Na některých stromech Lampového lesa se nachází platformy. Každá platforma má tvar kruhu s kmenem stromu uprostřed. Po obvodu každé platformy se nachází nenulový počet lamp. Pokud se na platformě nachází aspoň dvě lampy, tvoří jejich pozice vrcholy konvexního mnohoúhelníku (pro tuto úlohu berme úsečku za konvexní dvojúhelník). Řekneme, že dvě lampy spolu sousedí na platformě, pokud jsou spojeny stranou tohoto mnohoúhelníku. Některé platformy jsou propojeny provazovými mosty. Každý most propojuje právě dvě platformy, navíc každému konci je přiřazena právě jedna lampa. Řekneme, že dvě lampy spolu sousedí, pokud spolu sousedí na platformě, nebo se nachází na opačných stranách jednoho mostu. Mosty jsou postaveny tak, že pro každé dvě platformy existuje právě jeden způsob, jak mezi nimi přejít, pokud každý most použijeme jen jednou a nezajímá nás, v jakém směru jsme prošli po platformě (tedy jakým způsobem jsme na každé platformě obešli strom). Zrzoun a Drzoun zapalují lampy na platformách. Nejdříve zapálí Zrzoun nějakou lampu zlatým plamenem, pak zapálí Drzoun nějakou lampu duhovým plamenem. Následně se střídají na tahu počínaje Zrzounem. Hráč, který je na tahu musí zapálit libovolnou lampu, která sousedí s jinou lampou hořící jeho barvou. Pokud taková lampa neexistuje, vynechává tah. Hráči mohou zapalovat pouze nehořící lampy. Na začátku nehoří žádná lampa. O struktuře platforem a mostů víme pouze to, že dohromady se na platformách nachází 2019 lamp. Oba hráči se snaží maximalizovat počet lamp jejich barvy. Kolik lamp si může zaručit Zrzoun na každém rozdělení platforem, lamp a mostů?

Řešení. Ukážeme, že Zrzoun si může zaručit 674 lamp.

V řešení několikrát použijeme následující pozorování:

Pozorování 1: Pokud hráč A zapálí lampu na jedné straně nějakého mostu, rozdělí tímto systém platforem na dvě části (před mostem a za mostem). Pokud má hrýč B zapálenou lampu v jedné z těchto částí, pak již nikdy nemůže zapálit žádnou lampu v druhé části. Proto všechny lampy v druhé části získá hráč A a to bez ohledu na čas, kdy je zapaluje. Existuje tedy optimální strategie hráče A, ve které tyto lampy zapáli až jako poslední.

Pro přehlednost budeme hráče označovat jen Z a D.

Hráč Z si může zajistit nejvýše 674 lamp.

Nyní ukážeme systém platforem, kde si Z nemůže zajistit více než 674 lamp. Uvažme následující systém lamp. Jedna platforma obsahuje 6 lamp. Nazvěme ji malá a očíslujme tyto lampy dokola 1 až 6. Z každé liché lampy vede most na další platformu, která obsahuje 671. Tyto platformy nazvěme velké. Dohromady tedy systém obsahuje 4 platformy - 1 malou a 3 velké. Nyní uvažme možné strategie hráče Z. Pokud je jeho první tak na velkou platformu p, může hráč D zapálit lampu na jednom konci mostu, který propojuje malou platformu a velkou platformu p. Potom ovšem hráč Z může získat pouze lampy z platformy p, tedy nejvýše 671.

Zbývá tedy zvážit situaci, kdy Z začíná zapálením lampy na malé platformě. Vzhledem k symetrii situace nám stačí rozlišit případy, kdy Z zapálí lichou nebo sudou lampu. Předpokládejme nejdřív, že zapálí lichou lampu l. Pak D zapálí lampu $l + 3$. Podle úvodního pozorování můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že Z následně opět hraje na malou platformu. Hráč D hraje zrcadlově. Tedy pokud Z zapálí $l + 1$, pak D zapálí $l + 2$, a pokud Z zapálí $l - 1$, pak $l + 4$. Poslední lampy na malé platformě jsou již vynucené. Hráč Z tak získá právě jednu lichou lampu na malé platformě a dvě sudé. Dohromady proto získá 674 lamp.

Nyní předpokládejme, že hráč Z začíná na malé platformě sudou lampu l. Pak hráč D může zapálit lampu $l + 1$. Opět podle pozorování 1 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že nejdřívě hrají hráči na malou platformu. Protože se ovšem pravidelně střídají na tahu a vždy mají jen jednu možnost, kam hrát, je rozdělení lamp jednoznačně dáno. Hráč Z tak získá lampy $l, l - 1, l - 2$, tedy opět získá jen jednu lichou lampu a k ní příslušející velkou platformu.

Bez ohledu na počáteční tah hráče Z má D vždy takovou strategii, že Z získá nejvýše 674 lamp.

Hráč Z si může zajistit aspoň 674 lamp.

Nyní ukážeme, že na každém systému platforem si může Z zajistit aspoň 674 lamp.

Začneme druhým pozorováním:

Pozorování 2: Uvažme libovolný most v systému platforem. Jeho odebráním rozdělíme platformy na dvě části, které obsahují různé počty lamp, jelikož dohromady je lamp lichý počet. Nakresleme tedy na most šipku tak, aby směřovala od menší části k větší. Takto lze orientovat každý most. Nyní se můžeme postavit na libovolnou platformu a postupně procházet po mostech tak, abychom šli ve směru šipek. Protože se po mostě tímto způsobem nikdy nemůžeme vráti, musíme se někdy po konečném počtu kroků nutně zastavit na nějaké platformě. Tedy najdeme patformu takovou, že z ní již nevede žádná šipka. Tedy pro libovolný most, který z této platformy vede, platí, že část zamostem má nejvýše 1009 lamp. Tuto platformu navěme středová.

Ukážeme strategii hráče Z, která mu zaručí aspoň 674 lamp. V této strategii bude Z hrát pouze na středovou platformu, dokud zde bude nezapálená lampa. Pokud hráč D zahraje tak, že bude podle pozorování 1 oddělen od středové platformy, hráč Z získá vše na straně středové platformy tedy aspoň 1010 lamp. Proto můžeme uvažovat jen takovou strategii hráče D, kde zapálí lampu na straně středové platformy. Navíc podle pozorování 1 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že hraje přímo na středovou platfoprmu, dokud je na ní nezapálená lampa. hráči se proto budou střídat na tazích na středové platformě a poté, co bude celá zapálená, zapálí také své oddělené části platforem. Zde se však již nemohou ovlivnit.

Proto můžeme hru převést do jednoduššího tvaru. Každé lampe na středové platformě přiřaďnmě celé číslo. Toto číslo je 1, pokud od lampy nevede most. V opačném případě k 1 navíc přičtěme počet lamp nacházejících se za tímto mostem. Hráči vlastně hrají jen na středovou platformu a snaží se maximalizovat součet zapálených lamp. Získané skóre skutečně odpovídá podle pozorování 1 počtu lamp, které na konci hry zapálí.

Nechť se na středové platformě nachází n lamp. Pak zřejmě Z získá souvislý úsek lamp o délce $L = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ a D získá souvislý úsek lamp o délce $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Pokud ukážeme, že se na platformě nachází taková lampa k, že libovolný úsek délky L obsahující k má součet aspoň 674, máme vyhráno. Mohou nastat dva případy. Pokud každý úsek délky L má součet aspoň 674, pak za k můžeme zvolit libovolnou lampu. Předpokládejme proto, že skutečně existuje úsek delky L takový, že jeho součet je méně než 674. Pak ovšem jeho komplement je úsek délky l, jehož součet je aspoň $2019 - 673 = 1346$. Označme hodnoty lamp v komplementárním úseku $a_1, a_2, \ldots a_l$. Platí tedy $a_1+a_2+\cdots+a_l \geq 1346$. Podobným důkazem jako v úvaze 2 vidíme, že existuje index i takový, že $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq 673$ a $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_l \geq 673$. Zvolíme-li za k lampu i, pak každý interval dolky L obsahující k bude obsahovat aspoň celý interval $[1, i]$ nebo celý interval $[i, l]$. Dokonce musí buď obsahovat celý interval $[1, l]$ nebo aspoň jednu další lampu. To ovšem znamená, že každý interval obsahující k má součet aspoň $673 + 1 = 674$. To jsme chtěli dokázat.