Řešení 4. série

Algebra

Úloha 4.1. Drzounův strom měl ve skutečnosti tvar polynomu třetího stupně. O jeho ztracených kořenech si Drzoun pamatoval jen to, že dva z nich byly 1 a 2. Navíc věděl, že absolutní člen polynomu je druhá mocnina nějakého celého čísla. Jakou honotu mohl mít třetí kořen polynomu?

Řešení. Hledaný polynom můžeme napsat ve tvaru $k \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-a)$, $a, k \in \mathbb{R}$. Nechť $a \neq 0$. Dosadíme-li $k = -\frac{1}{2a}$, dostaneme polynom

$$-\frac{1}{2a}(x-1)(x-2)(x-a) = -\frac{1}{2a}x^3 + \frac{a+3}{2a}x^2 - \frac{3a+2}{2a}x + 1,$$

jehož kořeny jsou $1, 2, a$ a jeho absolutní člen je $1 = 1^2$. Pro $a = 0$ má polynom $x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ kořeny $1, 2, 0$ a jeho absolutní člen je $0 = 0^2$. Za a tedy můžeme dosadit libovolné reálné číslo.

Úloha 4.2. Máme dána čtyři kladná reálná čísla a, b, c, d. Víme, že $\frac{c+d}{a+b} = cd = 2$. Nalezněte nejmenší hodnotu součtu $2(a+b+c+d)$.

Řešení. Jelikož $\frac{c+d}{a+b} = 2$, máme $2(a+b+c+d) = 3(c+d)$, chceme tedy minimalizovat výraz $c+d$ za podmínky $cd = 2$. Avšak AG nerovnost nám říká, že $c+d \geq 2\sqrt{cd} = 2\sqrt{2}$ a rovnost nastane, právě když $c = d$. Tedy $2(a+b+c+d) \geq 6\sqrt{2}$ a minimální hodnoty výraz nabývá např. pro $c = d = \sqrt{2}, a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Uvádím i alternativní řešení, protože několik z vás se o ně (až na jednu výjimku bez úspěchu) pokusilo: z $cd = 2$ si vyjádříme $d = \frac{2}{c}$, tj. chceme minimalizovat funkci $f(c) = c + \frac{2}{c}$ na intervalu $(0, \infty)$. Tato funkce má na tomto intervalu derivaci $f'(c) = 1 - \frac{2}{c^2}$, tedy $f'(c) = 0$, právě když $c = \sqrt{2}$. Avšak NEPLATÍ, že funkce f' nabývá v bodě x_0 nulové hodnoty, právě když f má v tomto bodě lokální minimum, lokální maximum: může tam být tzv. inflexní bod (př. $y = x^3, x_0 = 0$), funkce f může být okolo x_0 konstantí atd. Tyto případy můžeme rozlišit tím, že se podíváme na derivaci druhou, ale v našem případě je nejjednoduší argumentovat tak, že na intervalu $(0, \infty)$ má f' jediný nulový bod $\sqrt{2}$ a na tomto intervalu je rostoucí, tedy naše funkce f je napravo od $\sqrt{2}$ rostoucí (derivace je všude kladná) a nalevo klesající (derivace je všude záporná). Proto se v $\sqrt{2}$ opravdu musí nacházet lokální minimum.

Úloha 4.3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, dokažte, že platí:

$$\frac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x+z} + \sqrt{y+z}} \geq \frac{2}{5}.$$

BRKOS Team 2020

Řešení. Nerovnost budeme chtít umocnit na druhou, abychom se zbavili odmocnin (jde to řešit i bez toho, ale nevím o žádném elementárním řešení). Protože nám po umocnění v nerovnosti naskáká spousta členů tvaru $(x+y)$ nebo $\sqrt{x+y}$ (pokud nevěříte, tak si to vyzkoušejte :)), tak nejprve pro zjednodušení zavedeme následující substituci (po vzoru Vaška Janáčka):

$$a = \sqrt{x+y}, b = \sqrt{y+z}, c = \sqrt{z+x}.$$

Nyní nerovnost umocněme a roznásobme, ať nemáme zlomky, a upravme, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}}{a+b+c} &\geq \frac{2}{5},\\
\frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}{(a+b+c)^2} &\geq \frac{4}{25},\\
25(a^2+b^2+c^2) &\geq 8(a+b+c)^2 = 8(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac),\\
17(a^2+b^2+c^2) &\geq 8(2ab+2bc+2ac).
\end{aligned}$$

Vidíme, že na levé straně máme členy typu a^2+b^2, kdežto na pravé jsou typu $2ab$, což evokuje úpravu do tvaru: $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geq 0$. Po chvilce zkoušení zjistíme, že nerovnost jde takto upravit celá a že dostaneme:

$$a^2+b^2+c^2+8((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \geq 0,$$

což je nerovnost, která zřejmě platí, a navíc je ekvivalentní s nerovností ze zadání, takže platí i ta. Nerovnost se samozřejmě dala řešit i bez zavedení této substituce, ale myslím, že substituce ji hodně zjednodušila.

Úloha 4.4. Najdětě všchny funkce $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ splňující $x+y \neq 0$ platí:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} + 2xy.$$

Řešení. Ze zadání hledáme všechny takové funkce $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, které pro každé $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ splňující $x+y \neq 0$ splňují

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} + 2xy.$$

Ukážeme, že každá taková funkce je tvaru $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Definujme pomocnou funkci $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} - x^2$. Pokud ukážeme, že $g(x)$ musí být tvaru cx, bude platit i tvrzení o tvaru $f(x)$. Dosazením $x+y$ do g získáváme

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x) + f(y) - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} + 2xy - \frac{1}{x+y} - (x+y)^2\\
&= g(x) + \frac{1}{x} + x^2 + g(y) + \frac{1}{y} + y^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} + 2xy - \frac{1}{x+y} - (x+y)^2\\
&= g(x) + g(y).
\end{aligned}$$

Hledáme proto všechny funkce g vyhovující rovnici $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Této vlastnosti funkce se říká aditivita.

Nejprve dosaďme $x = y = 0$, dostáváme $g(0) = 2g(0)$, tedy $g(0) = 0$. Definujme $c = g(1)$. Pak pro každé x platí $g(x+1) = g(x) + g(1) = g(x) + c$. Funkce g se proto na přirozených číslech chová jako aritmetická řada s diferencí c neboli roste lineárně. Proto pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $g(n) = n \cdot c$.

Dále musí platit $g(1) = g(-x+x+1) = g(-x)+g(x+1) = g(-x)+g(x)+g(1)$. Proto $g(x) = -g(-x)$. Funkce je proto lineární na celém $\mathbb{Z}$.

Zbývá dokázat linearitu i pro necelá racionální čísla. Nechť tedy $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je zlomek v základním tvaru. Z aditivity g získáváme

$$g\left(\frac{a}{b}\right) = g\left(\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{1}{b}\right) + \cdots + g\left(\frac{1}{b}\right) = a \cdot g\left(\frac{1}{b}\right).$$

Dále platí

$$c = g(1) = g\left(\frac{b}{b}\right) = g\left(\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{1}{b}\right) \ldots g\left(\frac{1}{b}\right) = b \cdot g\left(\frac{1}{b}\right).$$

Proto $g(\frac{1}{b}) = \frac{c}{b}$, a tedy $g(\frac{a}{b}) = a \cdot g(\frac{1}{b}) = c \cdot \frac{a}{b}$. Dohromady jsme dokázali, že g musí nutně splňovat pro všechna $x \in \mathbb{Q}$ a nějakou konstantu $c \in \mathbb{Q}$ $g(x) = cx$. Zpětným dosazením do definice funkce g získáváme $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{Q}$. Snadno se ověří, že pro každé c funkce f splňuje rovnici ze zadání.

Úloha 4.A. Dokažte, že pokud lze číslo k zapsat právě 7 způsoby jako k = a x b, pro nějaká a, b přirozená, pak je šestou mocninou prvočísla.

Řešení. Nejprve dokažme, že číslo k nemůže mít dva prvočíselné dělitele. Pro spor předpokládejme, že má. Pak Počet způsobů, jak se dá rozepsat $k = a \cdot b$ je vlastně počet různých čísel a, dělitelů k. To proto, že druhý činitel zíkáme jako $b = \frac{k}{a}$.

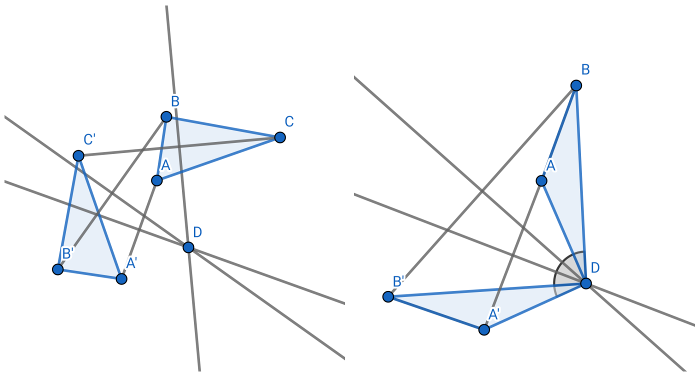
Nechť k je přirozené číslo a $k = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$ jeho rozklad na prvočinitele. Všimněme si, že každý zápis $k = a \cdot b$ jednoznačně určuje (a je jednoznačně určen) dělitele a čísla k. Zároveň platí, že dělitelů je $(e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_n+1)$, a tedy $(e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_n+1) = 7$. Z toho plyne, že existuje jediné nenulové e_i a $e_i = 6$. Dostáváme, že $k = p_i^6$.

Úloha 4.B. V rovině je dán mnohoůhelník M. Kouma jej nejdříve posunul a pak otočil o nenulový úhel menší než 360°, čímž získal nový mnohoúhelník M'. Dokažte, že si Ňouma nyní vždy může vybrat v rovině bod B a úhel α tak, že když otočí M' kolem bodu B o úhel α, dostane zpět přesně mnohoúhelník M.

Řešení. Protože posunutí i rotace jsou shodná zobrazení, je M shodné s M'.

Zvolme A, B nějaké dva vrcholy mnohoúhelníku M. Střed rotace D získáme jako průsečík osy úsečeky AA' s osou úsečky BB'. Úhel rotace zvolme $\alpha = |\sphericalangle ADA'|$. Rotaci tedy značme $r_{D,\alpha}()$. Nyní je třeba dokázat správnost.

$r_{D,\alpha}(A) = A'$, neboť $|AD| = |A'D|$ (D leží na ose AA') a zřejmě $|\sphericalangle ADA'| = \alpha$.
$r_{D,\alpha}(B) = B'$, neboť $|BD| = |B'D|$ (D leží na ose BB') a $|\sphericalangle BDB'| = |\sphericalangle ADA'| = \alpha$ (plyne ze shodnosti trojúhelníků $A'DB'$ a ADB podle věty sss, viz obrázek č. 2).
$r_{D,\alpha}(X) = X'$ pro ostatní vrcholy X, neboť trojúhelníky ABX a $A'B'X'$ jsou shodné a rotace je shodné zobrazení, tudíž z rovností $r_{D,\alpha}(A) = A', r_{D,\alpha}(B) = B'$ plyne i $r_{D,\alpha}(X) = X'$.



Úloha 4.C. Máme nekonečný systém ulic newyorského typu (ulice tvoří čtvercovou mřížku). Konají se zde běžecké závody. Ze startu se běží nejprve směrem na východ. Pravidla říkají, že při příchodu na libovolnou křižovatku musíme zabočit doprava nebo doleva, nesmíme jít rovně nebo se vracet. Cílem soutěže je přiběhnout ke startu směrem z východu. Ukažte, že závod nelze dokončit.

Řešení. Křižovatkám přidělíme souřadnice: osa x půjde ze západu na východ, osa y z jihu na sever a start budiž počátkem se souřadnicemi [0,0]. Nejprve běžíme na východ, tedy ve směru osy x, pak na sever či jih, tedy ve směru osy y, pak opět ve směru osy x atd. Liché kroky (krok je pohyb mezi dvěma sousedícími křižovatkami) jsou tedy ve směru osy x a sudé ve směru osy y. Náš poslední krok, který má vést na západ, tedy musí být lichý.

Součet souřadnic je nejprve sudý, pak lichý ([1,0]), pak opět sudý ([1,1], nebo [1,-1]) atd. Po lichém počtu kroků je tedy součet souřadnic lichý a po sudém sudý. Víme, že cíl má souřadnice [0,0], jejich součet je sudý a je tedy potřeba do něj dorazit sudým krokem. To je ale spor se závěrem minulého odstavce. Z východu tedy nejde do cíle dorazit.

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $(a+b)(b+c)+2b(a+b+c) = 0$, kde c je prvočíslo.

Řešení. Relativně bezbolestně lze k řešení dojít substitucí $t = a + b + c$. Po dosazení máme $2t(t-a-c)+(t-a)(t-c) = 0$, na což se můžeme dívat jako na kvadratickou rovnici v t s parametry a, c:

$$3t^2 - 3(a + c)t + ac = 0. \tag{1}$$

Její diskriminant je roven $9(a + c)^2 - 12ac = 9a^2 + 6ac + 9c^2$. Aby t vyšlo celočíselné, jistě diskriminant musí být druhou mocninou celého čísla, navíc druhá mocnina dělitelná třemi je dělitelná rovnou devíti, můžeme tedy psát $9a^2 + 6ac + 9c^2 = 9d^2$ pro nějaké d, které je celé a navíc (BÚNO) nezáporné.

Na novou rovnici se můžeme dívat jako na kvadratickou v a s parametry c, d:

$$3a^2 + 2ca + 3(c^2 - d^2) = 0. \tag{2}$$

Její diskriminant je roven $4c^2-4\cdot 9(c^2-d^2) = 4(9d^2-8c^2)$, což opět – aby a bylo celé – musí být druhá mocnina celého čísla (navíc dělitelná čtyřmi), takže dostaneme $9d^2 - 8c^2 = D^2$ pro nějaké celé nezáporné D.

Upravme novou rovnici na součin: $(3d - D)(3d + D) = 8c^2$ a uvědomme si, že jelikož c je prvočíslo, pravá strana se na součin dvou celých čísel mnoha způsoby rozložit nedá.

Máme tedy soustavu

$$3d + D = r,$$
$$3d - D = s,$$

kde $r, s | 8c^2, r > s$. Navíc $6 | r + s$, aby d bylo celé.

V tomhle okamžiku se již můžeme (skoro) zcela radovat, jelikož máme rovnici již prakticky vyřešenou. Teď zbývá poslední (trošku otravná, přiznávám) část: získat všechna řešení. Čtení zbytku řešení už je, varuji, jen pro otrlé.

Vyřešme nejprve zvlášť případ $c = 2$: snadno dostaneme $(a, b) \in \{(3, -1), (3, 2), (0, -2), (0, 0)\}$. Můžeme tedy předpokládat, že $r = 2^m c^n$ pro $m > 0$; aby bylo $r+s$ sudé, spolu s předchozím celkem dostáváme $r \in \{4c^2, 2c^2, 4c\}$. Vyřešíme nyní separátně tyto tři případy.

Ještě než se do toho pustíme, vyřešme bokem případ $c = 3$ (pokud tohle řešení dočtete až do konce, za což by vám patřil můj neskonalý obdiv, uvidíte, že to zkrátí následný rozbor). Dostaneme řešení $(a, b) \in \{(-2, -2), (-2, 1), (0, -3), (0, 0)\}$.

1. Začněme případem $r = 4c, s = 2c$, jelikož zde určitě 6 dělí $r + s$. Dostaneme tedy $d = D = c$. Jelikož $4D^2$ je diskriminant rovnice (2), máme $a = \frac{-2c \pm 2c}{6} \in \{0, -\frac{4c}{6}\}$. Jelikož 3 nedělí c, máme $a = 0$. Jelikož diskriminant rovnice (1) je roven $9d^2$, máme $t = \frac{a+c\pm c}{2}$, tedy $t = a + b + c = b + c \in \{0, c\}$. Máme tedy řešení $(a, b, c) \in \{(0, -c, c), (0, 0, c)\}$ pro libovolné prvočíslo $c > 3$.

2. Nyní uvažujme případ $r = 2c^2, s = 4$. Tedy $r + s = 2c^2 + 4$, což je dělitelné šesti, právě když $c^2 + 2$ je dělitelné třemi. Kvadrát nedělitelný třemi ale dává modulo třemi zbytek 1, takže podmínce vyhovuje libovolné z námi uvažovaných c. Pak $d = \frac{c^2+2}{3}, D = c^2 - 2$. Dále tedy z (2) máme

$$a = \frac{-c \pm (c^2 - 2)}{3}.$$

Jelikož 3 dělí čitatele (aby a bylo celé), dostaneme $a = \frac{c^2-c-2}{3}$ pro $c \equiv -1 \pmod 3$ a $a = -\frac{c^2+c-2}{3}$ pro $c \equiv 1 \pmod 3$.

Z (1) potom dostaneme

$$t = \frac{3a + 3c \pm (c^2 + 2)}{6},$$

tedy

$$b = t - a - c = \frac{-3a - 3c \pm (c^2 + 2)}{6},$$

což:

   - pro $c \equiv -1 \pmod 3$ nabývá hodnoty buď $\frac{-c+2}{3}$, nebo $-\frac{c^2+c}{3}$,
   - pro $c \equiv 1 \pmod 3$ nabývá hodnoty buď $-\frac{c+2}{3}$, nebo $\frac{c^2-c}{3}$.

3. Poslední zbývá případ $r = 4c^2, s = 2$. Postupovat budeme obdobně, tedy to už zkrátíme. Dostaneme:

   - pro $c \equiv 1 \pmod 3$ máme $a = \frac{2c^2-c-1}{3}$ a $b = \frac{-c+1}{3}$ nebo $-\frac{2c^2+c}{3}$,
   - pro $c \equiv -1 \pmod 3$ máme $a = -\frac{2c^2+c-1}{3}$ a $b = -\frac{c+1}{3}$ nebo $\frac{2c^2-c}{3}$.