Řešení 3. série

Teorie čísel

Úloha 3.1. Nechť je dáno iracionální číslo x. Změňme v jeho desetinném rozvoji právě 3 číslice a výsledné číslo označme jako y. Rozhodněte, za jakých podmínek bude y také iracionální.

Řešení. Ukážeme, že pokud je x iracionální, pak y je vždy také iracionální. Předpokládejme, že by tomu tak nebylo. Pak změnou 3 číslic v desetinném zápise iracionálního čísla x můžeme získat racionální y. To ovšem znamená, že změnou 3 číslic v zápise racionálního y jsme schopni získat iracionální x.

Povšimněme si, že změnu jedné číslice můžeme vyjádřit jako přičtení (resp odečtění) racionálního čísla. Například změnu $0.3333\cdots \to 0.3313\ldots$ provedeme přičtením $\frac{-2}{1000}$. Zřejmě ovšem součet libovolných dvou racionálních čísel je opět racionální číslo, protože každé racionální číslo lze zapsat zlomkem. Mějme libovolná dvě racionální čísla $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$. Pak jejich součet je $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, což je opět zlomek, tedy racionální číslo.

Změníme-li v zápise y libovolné 3 cifry, ve skutečnosti jsme k y přičetli 3 racionální čísla. Jak jsem ukázali, tento součet musí být opět racionální. Ale x racionální není, což je spor. Proto náš předpoklad musel být chybný a y je proto iracionální.

Úloha 3.2. Hnědák umí kopyty vyklepat každé číslo p. Nechť p je prvočíslo, k je přirozené číslo. Ukažte, že pokud je k složené, rovnice $x^k - y^k = p$ nemá v $\mathbb{N}$ řešení.

Řešení. Protože je k složené číslo, platí $k = a \cdot b$, kde $a, b \geq 2$. Pak

$$x^k - y^k = x^{ab} - y^{ab} = (x^a)^b - (y^a)^b = (x^a - y^a)\cdot((x^a)^{b-1} + (x^a)^{b-2}\cdot y + \cdots + x^a \cdot y^{b-2} + y^{b-1}) =$$

$$= (x-y)\cdot(x^{a-1} + x^{a-2}\cdot y + \cdots + x\cdot y^{a-2} + y^{a-1})\cdot((x^a)^{b-1} + (x^a)^{b-2}\cdot y + \cdots + x^a\cdot y^{b-2} + y^{b-1})$$

Vidíme, že druhá závorka obsahuje právě $a \geq 2$ kladných členů, tedy je rovna alespoň 2. Stejně tak druhá závorka obsahuje právě $b \geq 2$ kladných členů, tedy je rovna alespoň 2. Jejich součin je tedy jistě složené číslo a v součinu s $(x - y)$ bude stále složené. Rovnice ze zadání tedy nemá řešení.

Úloha 3.3. Nechť a, b, c jsou taková přirozená čísla, že platí $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Dokažte, že $a + b$ je dělitelné nějakým kvadrátem větším než jedna.

Řešení. Označme $d = NSD(a, b)$ (největšího společného dělitele čísel a, b), pak $a = a_0 d, b = b_0 d$, kde b_0 a a_0 jsou vhodná nesoudělná přirozená čísla. Sečtením zlomků na levé straně rovnosti ze zadání a umocněním na minus prvou dostaneme rovnost:

$$c = \frac{ab}{a+b} = \frac{da_0b_0}{a_0+b_0}.$$

Ukážeme, že čísla a_0b_0 a (a_0+b_0) jsou nesoudělná. Nechť p je libovolné prvočíslo takové, že $p|a_0b_0$ a předpokládejme pro spor, že $p|a_0+b_0$. Pak (jelikož je p prvočíslo) dostáváme, že $p|a_0$ nebo $p|b_0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p|a_0$. Pak $p|b_0$, jelikož $b_0 = (a_0+b_0)-a_0$, což je rozdíl dvou přirozených čísel dělitelných p. To je ale spor s tím, že a_0 a b_0 jsou nesoudělná, a tedy jsou nesoudělná i čísla a_0b_0 a a_0+b_0.

Jelikož c je přirozené číslo, tak dostáváme, že $a_0+b_0|da_0b_0$. Jelikož jsou a_0b_0 a (a_0+b_0) nesoudělná, tak odtud dostáváme, že $a_0+b_0|d$. Tedy $d = k(a_0+b_0)$ pro vhodné přirozené k. Potom ale $a+b = d(a_0+b_0) = k(a_0+b_0)^2$. A protože a_0 i b_0 jsou přirozená čísla, tak jejich součet je větší než 1. Takže existuje přirozené číslo větší než 1, které dělí $a+b$ ve druhé mocnině.

Úloha 3.4. Tousty mají tvar trojúhelníku s celočíselnými stranami a, b, c. Najděte všechny takové trojice (a,b,c), že existuje pravoúhlý trojúhelník se stranami $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[6]{b}$, $\sqrt[6]{c}$.

Řešení. Nechť existuje pravoúhlý trojúhelník se stranami $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[6]{b}$, $\sqrt[6]{c}$. Bez újmy na obecnosti můžeme $\sqrt[6]{c}$ označit za přeponu. Pak pro tento trojúhelník podle Pythagorovy věty platí:

$$(\sqrt[6]{a})^2 + (\sqrt[6]{b})^2 = (\sqrt[6]{c})^2 = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}.$$

Umocněním na třetí dostaneme:

$$a + b + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} = c.$$

Všimněme si, že $3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}$ je kladné číslo (jelikož a, b jsou kladná čísla). Proto tedy platí $a+b<c$. Dostáváme se tedy ke sporu s trojúhelníkovou nerovností podle které $a+b>c$. Neexistuje žádná trojice (a,b,c), která by splňovala zadání.

Úloha 3.A. Liběnka přemýšlí, jak se dnes obléci. V kufru má 5 různých kabátů. Kolika způsoby se může obléci, pokud si může najednou nasadit libovolný počet z těchto svršků a záleží na pořadí?

Řešení. Liběnka má 5 kabátů a tedy celkem 6 možností, kolik kabátů si na sebe obleče. Každá z těchto možností pak poskytuje další možností, které jsou určeny pořadím oblečených kabátů:

1) Liběnka si obleče 0 kabátů, protože venku je překvapivě teplo $\to$ 1 možnost.

2) Liběnka si obleče 1 kabát $\to$ 5 možností.

3) Liběnka si obleče 2 kabáty: nejdříve si ze všech 5 kabátů vybere, který z nich si obleče jako první. Následně ji na výběr zbývají už jen 4 kabáty, ze kterých si vybere, který z nich si obleče jako druhý $\to 5 \cdot 4 = 20$ možností.

4) Liběnka si obleče 3 kabáty: nejdříve si ze všech 5 kabátů vybere, který z nich si obleče jako první. Poté ji na výběr zbývají už jen 4 kabáty, ze kterých si vybere, který z nich si obleče jako druhý. Následně si třetí kabát vybírá pouze ze 3 zbývajících kabátů $\to 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.

Obdobným způsobem můžeme dopočítat počty možných pořadí ve kterých si Liběnka obleče 4 a 5 kabátů.

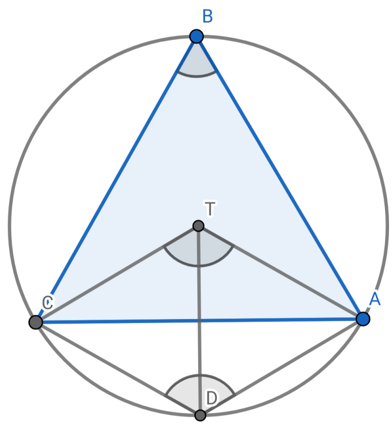
5) Liběnka si obleče 4 kabáty → $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ možností.
6) Liběnka si obleče 5 kabátů → $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ možností.
Nyní použijeme kombinatorické pravidlo součtu: $1 + 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 326$
Liběnka má tedy celkem 326 možností, jak si obléci svých 5 kabátů.

Další o něco stručnější cestou k výsledku je pomocí kombinačních čísel vypočíst počet možností, kterými si Liběnka může z 5 kabátů vybrat n kabátů, vynásobit je $n!$ (tzn. počtem možností s různým pořadím n kabátů) a následně všechny možnosti sečíst:

$$\binom{5}{0}0! + \binom{5}{1}1! + \binom{5}{2}2! + \binom{5}{3}3! + \binom{5}{4}4! + \binom{5}{5}5! = 326$$

Úloha 3.B. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC s obsahem 1. Nalezněte bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl tětivový a měl co největší obsah. Tento obsah spočtěte.

Řešení. Pro konvexnost čtyřúhelníku $ABCD$ vyberme bod z oblouku nad tětivou AC. Pro každý takový bod D má trojúhelník ABD stejnou základnu, ale rozdílnou výšku. Aby byl obsah maximální, musí být maximální výška, což nastane, umístíme-li bod D doprostřed oblouku. A protože $|\sphericalangle ABC| = 60°$, $|\sphericalangle ATC| = 120°$ (středový úhel, T je těžiště), $|\sphericalangle ADC| = 120°$ (protější úhel k $\sphericalangle ABC$ v tětivovém čtřúhelníku) a ACT i ACD jsou oba rovnoramenné, mají stejný obsah, a to $\frac{1}{3}$. Celkový obsah $ABCD$ je tedy $\frac{4}{3}$.



Úloha 3.C. Máme šachovnici $n \times n$, kde n je přirozené číslo větší než 3. Za kolik nejméně tahů může Hnědák (nezapomeňme, že se pohybuje jako správný kůň ve tvaru písmena L) projít všechna políčka na hlavní diagonále?

Řešení. Uvažujme šachovnici $n \times n$ – její hlavní diagonála má tedy n políček. Kůň po každém skoku změní barvu políčka, na němž stojí, a jelikož všechna pole na diagonále mají stejnou barvu, dostat se z jednoho na druhé mu trvá minimálně 2 tahy. Tedy aby proskákal celou hlavní diagonálu, potřebuje alespoň $2n - 2$ tahů. Ukážeme že pro n různá od 4 a 7 tohoto minima lze dosáhnout.

Nejprve zavedeme několik označení. Budeme uvažovat diagonálu vycházející z levého dolního rohu. Políčka na hlavní diagonále označíme postupně $1, 2, ..., n$. Možné tahy koně si označíme $(\pm i, \pm j)$, kde číslo na první pozici značí, o kolik se posuneme v horizontálním směru (+ značí doprava, − doleva), a druhé značí, o kolik se posuneme ve vertikálním směru (+ značí nahoru, − dolů). Tedy např. zápis $(2, -1)$ značí tah „o dvě doprava, o jedno dolů“.

Dále si uvědomme, že jediná políčka na hlavní diagonále, do kterých se kůň dostane za dva tahy z políčka na hlavní diagonále s číslem k, jsou políčka $k \pm 3, k \pm 1$, a to pomocí sekvencí tahů $(2,1),(1,2);(-2,-1),(-1,-2);(2,-1),(-1,2);(1,-2),(-2,1)$.

Uvažujme nyní případ $n = 5$. Začneme s koněm na políčku 1. Z něho se může za dva tahy dostat na jediné pole na hlavní diagonále, a to je pole 4 (chybí mu manévrovací prostor na to, aby se dostal na pole 2). Nyní můžeme pokračovat na pole 3, 2 a pak 5. Tím pádem zvládneme pro $n = 5$ projít hlavní diagonálu za $2n - 2$ tahů, ovšem taktéž pro každou šachovnici $n \leq 9$: v levém dolním a pravém horním rohu 5×5 použijeme výše popsané schéma a část diagonály mezi políčky 5 a $n - 4$ projdeme bez problémů popořadě: máme totiž dost manévrovacího prostoru, abychom z $n - 5 \leq k \leq 5$ přešli na $k + 1$.

V případech $n = 6$, $n = 8$ zvládneme opět projít diagonálu za $2n - 2$ tahů. Pole projdeme v pořadí $1, 4, 5, 2, 3, 6$ a $1, 4, 7, 6, 3, 2, 5, 8$.

V případě $n = 4$ nemůžeme diagonálu projít za $2n - 2$ tahů: jediné pole na hlavní diagonále, na něž se dostanu z 1 za dva tahy, je 4. Platí to ale i naopak, ze 4 se za dva tahy dostanu jen do 1. Podobný problém máme v případě $n = 7$: z 1 se za dva tahy dostanu pouze do 4, avšak do 7 se za dva tahy dostanu opět jen z 4. V obou případech ukážeme, že nám bude stačit $2n$ tahů.

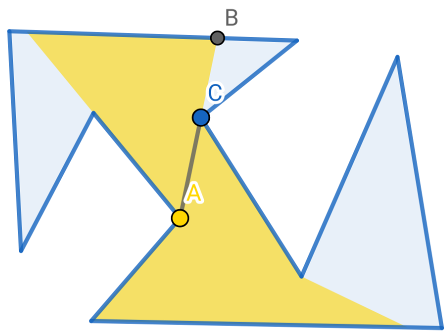
Nejprve si rozmysleme, že z pole k do pole $k \pm 2$ se dostaneme nejméně za 4 tahy: použijeme např. sekvenci $(2,1),(-2,1),(1,-2),(1,2)$ pro cestu z k do $k+2$ a podobně pro cestu z k do $k - 2$. Jelikož jsme během těchto tahů neopustili čtverec 3×3 s protějšími rohy $k, k \pm 2$, jsme tuto sekvenci tahů schopni provést na šachovnici pro jakékoli $n \leq 4$. Pro $n = 4$ tedy můžeme za 5 tahů projít diagonálu v pořadí $1, 4, 2, 3$ a pro $n = 7$ za 14 tahů v pořadí $1, 4, 7, 5, 6, 3, 2$.

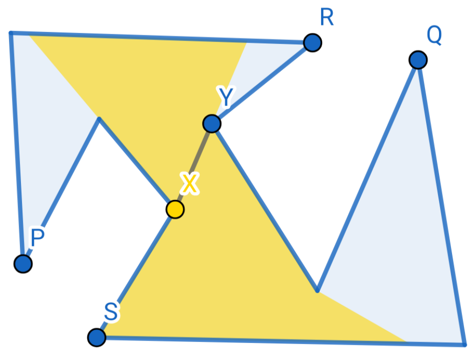
Tedy pro n různá od 4 a 7 můžeme hlavní diagonálu projít během $2n - 2$ tahů, pro $n \in \{4, 7\}$ během $2n$ tahů.

Úloha 3.D. Prostor u kormidla vypadá tak, že má tvar mnohoúhelníku. Dokažte, že každý – i nekonvexní – mnohoúhelník má dvojici vrcholů, které mají společného souseda a jejichž spojnice leží celá v mnohoúhelníku.

Řešení. Nejprve dokážeme, že každý mnohoúhelník M má alespoň jednu vnitřní úhlopříčku. Pokud jde o mnohoúhelnijk konvexní, je vnitřní každá jeho úhlopříčka.

Pro nekonvexní pak zvolme jeden bod A, jehož vnitřní úhel je nekonvexní, a definujme $V = \{X \in M; XA \subset M\}$ množinu bodů mnohoúhelníku, které jsou vidět z bodu A. Tento mnohoúhelník je nekonvexní (pokud by byl konvexní, tak dokonce sousedé A půjdou spojit úhlopříčkou), a tak má alespoň čtyři vrcholy a my z nich můžeme vybrat takový B, který je různý od A a ani s ním nesousedí. Ten je buď zároveň i vrcholem M, a tak je hotovo (vezmeme úhlopříčku AB), anebo jedna z jeho sousedních stran ve V míří na A (protne A v prodloužení do přímky). V takovém případě mezi A a B existuje vrchol C, který je zároveň i vrcholem M. Vezmeme tedy úhlopříčku AC.





Při hledání vnitřní úhlopříčky z bodů sousedících ob jeden další použijeme matematickou indukci, jíž dokážeme trochu silnější tvrzení, a to „Existují alespoň dva nesousední 'pěkné' vrcholy A, B mnohoúhelníku M (spojnice obou sousedů pěkného vrcholu tvoří vnitřní úhlopříčku)."

Čtyřúhelník takové vrcholy má (konvexní M všechny čtyři, nekonvexní M pouze ten s nekonvexním úhlem a ten protější). Každý mnohoúhelník pak můžeme nějakou vnitřní úhlopříčkou XY, jejíž existenci jsme již dokázali, rozdělit na dva (M_1, M_2) s menším počtem vrcholů. Kdyby jeden z menších mnohoúhelníků byl trojúhelník, pak tato úhlopříčka již splňuje zadání a je hotová celá úloha. Pro čtyř- a více-úhelníky vybereme v M_1 i v M_2 'pěkný' vrchol různý od X, Y, který existuje z indukčního předpokladu. Takže máme opět dva. (Na obrázku jsou pěkné $PQRS$.)

Z tvrzení dokázaného indukcí můžeme výsledné tvrzení snadno vyvodit.