Řešení 2. série

Hranaté hry

Úloha 2.1. Hnědák si skáče po vnitřku kostky o rozměrech $3 \times 3 \times 3$ krychličky. Jako správný kůň se ovšem umí pohybovat pouze speciálním způsobem. Vždy poskočí o dvě kostky jedním ze tří hlavních směrů a následně o jednu kostku kolmo ke směru předchozího skoku. Kolika způsoby může (v závislosti na tom, kde začíná) proskákat celou kostku tak, aby se v každé krychličce zastavil právě jednou?

Řešení. Pokud kůň začne v políčku kostky, které je úplně uprostřed, nemůže udělat žádný pohyb, protože posunem o dvě políčka kamkoliv se dostane mimo kostku.

Pokud kůň naopak začne jinde, nikdy se nemůže dostat do středu, neboť před posunem o jedna v kolmém směru se musel kůň nacházet uprostřed stěny. Předtím se ale musel nacházet ve vzdálenosti dvě políčka od tohoto středu, jenže všechna taková místa jsou opět mimo velkou kostku.

Ukázali jsme, že pokud kůň začne v políčku uprostřed, nemá se jak z něj dostat a naopak, pokud kůň začne kdekoliv jinde, nemá se jak dostat do políčka uprostřed. Počet možností je tedy 0.

Úloha 2.2. Na věž z 2019 krabic leze pavouk. Každá krabice má tvar krychle. Pavouk začal na spodní straně nejnižší krabice a jeho cílem je dostat se na vrchní stěnu krabice nejvyšší. V důsledku svého zmatení celou dobu leze jen po bočních stěnách, na každou stěnu vleze pouze jednou a nikdy neleze dolů. Kolik různých cest si může vybrat?

Řešení. Pavouk začíná na spodní straně nejnižší krabice a z ní se může dostat 4 způsoby na první boční stěnu. Zde může jít přímo nahoru, o jednu až tři stěny doprava nebo doleva, celkem tedy 7 možností, co může dělat na jedné krabici (poté jde vždy o jedno patro výše, kde nastává stejná situace). Aby se dostal z poslední krabice na vrchní stěnu, má opět 7 možností. Celkový počet možností je tedy $4 \cdot 7^{2018} \cdot 7 = 4 \cdot 7^{2019}$.

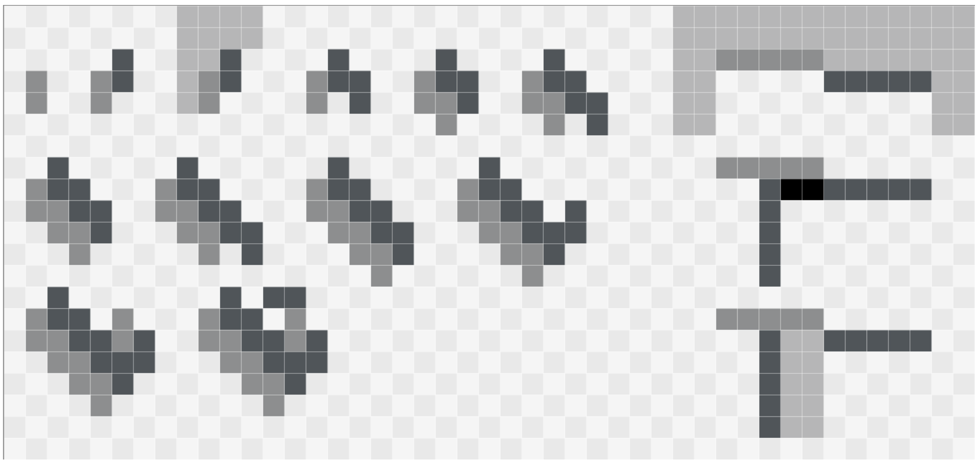
Úloha 2.3. Je dána nekonečná šachovnice a přirozené číslo $n > 1$. Ňouma a Henry spolu hrají hru: střídavě (Ňouma začíná) umísťují na šachovnici dílky n-mina (obdelníky $1 \times n$, kde 1 je velikost jednoho čtverečku na šachovnici) tak, aby každý dílek n-mina zakryl právě n políček na šachovnici a nepřekrýval se s žádným jiným. Ňouma je pořádný a snaží se, aby byla zaplněna celá šachovnice. Henry se mu v tom snaží zabránit a vyhrává tehdy, pokud existuje na šachovnici políčko, které nelze pokrýt dílkem n-mina. Rozhodněte, pro která n má Henry vyhrávající strategii.

Řešení. Ukážeme, že pro libovolné $n > 1$ má Henry vyhrávající strategii. Důkaz rozdělíme na dvě části pro $n = 2$ a $n > 2$. K řešení pro $n = 2$ se vztahuje obrázek nalevo, pro

$n > 2$ napravo. Henryho kostky jsou na obrázku světlé, zatímco Ňoumovy jsou tmavé.

Důkaz pro $n = 2$ V prvním tahu hraje Ňouma kamkoli na šachovnici následován Henrym, který hraje podle obrázku relativně k Ňoumovu tahu. Následuje opět Ňoumův tah, který hraje bez újmy na obecnosti kamkoli do šedého území (severně od dosud položených kostek). V následujících tazích již vždy hraje Henry tak, že Ňouma má jedinou možnou odpověď, aby v dalším tahu neprohrál. Postupně tak Henry Ňoumu může donutit hrát tak, aby nakonec zůstalo jediné ohraničené políčko.

Důkaz pro $n > 2$ Podobně jako ve hře pro $n = 2$ může hrát Henry tak, aby hra po prvních třech tazích vypadala jako na prvním obrázku. V dalším tahu hraje Henry podle druhého obrázku. Tím uzavře dvě políčka vybarvená černě ze tří stran. Jediná možnost, jak zaplnit černá pole, je právě dvěma kostkami vyplnit šedou oblast vyznačenou na třetím obrázku. Je ovšem zřejmé, že bez ohledu na následující tah Ňoumy může Henry hrát tak, že šedá oblast dvěma kostkami vyplnit nelze. Proto existuje strategie pro Henryho taková, že jedno z černých polí již nikdy nemůže být zaplněno.



Úloha 2.4. Ňouma si všiml, že všechny otisky kopyt leží v jedné rovině a na libovolné přímce leží právě 0, 1 nebo 3 otisky (otisky mají velikost bodu). Dokažte, že pokud se otisklo každé ze čtyř kopyt alespoň jednou, tak otisků nemůže být na podlaze konečně mnoho.

Řešení. Mějme pro spor konečně mnoho otisků (bodů) v rovině splňujících zadání.

Poznámka na začátek: V každém bodě leží nejvýše jeden otisk. Kdyby v nějakém bodě B leželo $n > 1$ otisků, pak:

- Pro $n > 3$, žádná přímka procházející bodem B nesplňuje zadání.
- Pro $n = 3$, přímka spojující bod B a čtvrtý otisk nesplňuje zadání.
- Pro $n = 2$, ostatních otisků je konečně mnoho, tudíž existuje ještě nekonečně mnoho přímek procházejících pouze bodem B a žádným dalším otiskem a ty nesplňují zadání.

Uvažme všechny dvojice přímka-otisk (p, X) takové, že přímka p prochází třemi otisky a bod X neleží na přímce p. Taková dvojice je určitě alespoň jedna (otisky jsou alespoň čtyři a neleží na jedné přímce) a zároveň jich je konečně mnoho (neboť otisků a tedy i těchto přímek je konečně mnoho). U každé takové dvojice můžeme mluvit o vzdálenosti otisku od přímky $|pX|$. Uvažme tedy dvojici (t, A), jejíž vzdálenost $|tA|$ je nejmenší ze všech dvojic. Přímka t pak prochází třemi otisky, označme je po řadě B, C, D. BÚNO pak tvrďme $|\sphericalangle BCA| \geq 90°$. Z toho pak vyplývá, že $|BA| > |BC|$, neboť BA je strana naproti největšímu úhlu v trojúhelníku BCA. Přímku procházející body B, A a ještě nějakým třetím označme s. Nyní zapíšeme obsah trojúhelníku BCA dvěma způsoby:

$$2S = 2S,$$

$$|BC||tA| = |BA||sC|.$$

Z $|BA| > |BC|$ pak vyplývá $|tA| > |sC|$, což je spor s minimalitou $|tA|$.

Úloha 2.A. Liběnka položila dva koláče o tvaru přesného kruhu na plochý talíř tak, že se dotýkají. Dokažte, že středy koláčů a bod dotyku leží na jedné přímce.

Řešení. Označme si kružnice (koláče) jako k_1, k_2, jejich středy popořadě jako S_1, S_2 a bod dotyku jako S. Označme tečny ke k_1, k_2 v bodě S popořadě jako t_1, t_2 a ukažme, že jsou stejné. Víme, že t_1 je kolmá na S_1S a t_2 na S_2S. Označme velikost menšího z úhlů, které svírají přímky t_1, t_2, jako α. Pak podle předchozího $360° = 2(90° + \alpha + 90°) = 360° + 2\alpha$, tedy $\alpha = 0$ a vskutku $t_1 = t_2$.

Nyní si jen stačí uvědomit, že úhel S_1SS_2 je díky předchozímu součet dvou pravých úhlů, tedy jeho velikost je rovna $180°$, a tak tyto tři body leží na přímce.

Úloha 2.B. V oboru $\mathbb{N}$ řešte rovnici $x^2 + 12x^x - 7x! = 2019^{2020} + 2020^{2019} - 2019 + 2020$.

Řešení. Pomůcka pro ty co neznají znak $\equiv$:
$a \equiv b \pmod 3$ znamená, že a a b mají stejný zbytek po dělení třemi.

Podívejme se na zbytky po dělení třemi jednotlivých členů levé a pravé strany. Vidíme, že $12x^x \equiv 0 \pmod 3$, $x^2 \equiv 1$ nebo $x^2 \equiv 0 \pmod 3$, podle toho jestli 3 dělí x nebo ne. Dále máme, pro $x \geq 3$, $\ -7x! \equiv 0 \pmod 3$. Na pravé straně máme $2019 \equiv 0 \pmod 3$, a tedy i $2019^{2020} \equiv 0 \pmod 3$. Dále $2020 \equiv 1 \pmod 3$, a tedy také $2020^{2019} \equiv 1 \pmod 3$.

Tedy pro $x \geq 3$ máme zbytek po dělení třemi na levé straně roven 1 nebo 0 a vpravo roven 2, což je spor.

To znamená že úloha může mít přirozené řešení jen pro $x = 1$ nebo $x = 2$, což ovšem po dosazení rovnici zřejmě neřeší.

Úloha 2.C. Matěj začal počítat tento příklad: nechť je zadáno n bodů v rovině s celočíselnými souřadnicemi, přičemž mají navzájem různé x-ové souřadnice. Dokažte, že existuje polynom $p(x)$ s racionálními koeficienty takový, že graf funkce $y = p(x)$ prochází danými n body.

Řešení. Nechť $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ jsou takové body, že $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Uvažme polynom $P_1(x) = (x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$. Nechť $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Zřejmě pokud x_i dosadíme do součinu $(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$, bude právě jeden z činitelů nulový, proto $P_1(x_i) = 0$. Navíc x_1 není kořenem polynomu P_1, protože $x_1 \neq x_j$ pro libovolně $j \neq 1$. Tedy $P_1(x_1) \neq 0$.

Můžeme definovat polynom $Q_1(x) = \frac{y_1}{P_1(x_1)}P_1(x)$. Platí $Q_1(x_1) = \frac{y_1}{P_1(x_1)}P_1(x_1) = y_1$. Dále $Q_1(x_i) = \frac{y_1}{P_1(x_1)}P_1(x_i) = \frac{y_1}{P_1(x_1)} \cdot 0 = 0$. Tedy funkce $y = Q_1(x)$ prochází body $(x_1, y_1), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)$. Podobně lze zkonstruovat polynomy $Q_2(x), Q_3(x), \ldots, Q_n(x)$, kde graf funkce $y = Q_j(x)$ prochází bodem (x_j, y_j) a bodem $(x_k, 0)$ pro každé $k \neq j$.

Nechť $Q(x) = Q_1(x) + \cdots + Q_n(x)$. Pro libovolné $i \in \{1, \ldots, n\}$ po dosazení x_i do Q získáme $Q(x_i) = Q_1(x_i) + \cdots + Q_i(x_i) + \cdots + Q_n(x_i) = 0 + \cdots + y_i + \cdots + 0 = y_i$. Proto graf funkce $Q(x)$ prochází každým z bodů (x_i, y_i), tedy Q je hledaný polynom.

Úloha 2.D. Součástka vznikla takto: nechť je v prostoru dána rovina α. V rovině α nechť je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Uvažme rovinu β, ve které leží úsečka AB a která je kolmá na rovinu α. V rovině β nechť je dán libovolný bod A' takový, že neleží v rovině α. Uvažme obraz šestiúhelníku $ABCDEF$ v posunutí o vektor AA' a označme jej jako $A'B'C'D'E'F'$. Vznikne nám tak těleso $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Ukažte, že pokud tomuto tělesu lze vepsat kouli, tak se jedná o pravidelný šestiboký kolmý hranol.

Řešení. Nazvěme hranolu vepsanou kouli $\mathcal{K}$, její střed S a poloměr r. Tato koule se dotýká stěny $ABCDEF$ v nějakém bodě P, což znamená, že $|PS| = r$ a zároveň je PS kolmá ke stěně $ABCDEF$. Podobně se také koule dotýká stěny $A'B'C'D'E'F'$ v bodě P' a opět platí $|P'S| = r$ a $P'S$ je kolmé na $A'B'C'D'E'F'$. Navíc protože $A'B'C'D'E'F'$ je posunutím $ABCDEF$, jsou obě stěny rovnoběžné. Protože PS a $P'S$ jsou na ně komé, musí být rovnoběžné i PS a $P'S$. Protože ovšem $P \neq P'$. Jsou body P, S, P' kolineární, po dvou různé a protože se navíc jedná o dva poloměry, musí PP' být průměr koule $\mathcal{K}$. Podobně lze ukázat, že každé dvě protilehlé rovnoběžné stěny hranolu mají vzdálenost $2r$.

Úsečka BD je kolmá na roviny $ABB'A'$ a $EDD'E'$. Poto $|BD|$ je vzdálenost těchto rovin od sebe a podle tvrzení z předchozího odstavce tedy $|BD| = 2r$. Protože $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník, platí také $|BF| = |DF| = |BD| = 2r$. Víme, že $ABB'A'$ a $EDD'E'$ jsou kolmé na podstavu. Chceme ukázat, že i zbylé dvojice stěny jsou na ni kolmé. $BCC'B'$ a $FEE'F'$ jsou rovnoběžné stěny a BF je přímka spojující dva body z obou stěn. Navíc $|BF| = 2r$ a také vzdálenost stěn musí být $2r$, neboť jim je vepsaná koule $\mathcal{K}$.

Pro spor předpokládejme, že $BCC'B'$ není kolmé na úsečku FB. Veďme bodem bodem B kolmici ke stěne $BCC'B'$, která protne stěnu $FEE'F'$ v nějakém bodě Q. Protože se jedná o přímku, která je kolmá na obě stěny, odpovídá délka úsečky BQ vzdálenosti stěn, tedy platí $|BQ| = 2r$. Protože BF není kolmé na $BCC'B'$, je FBQ pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu Q. Navíc ale $|FB| = |QB| = 2r$ a $|FQ| \neq 0$, což je spor s Pythagorovou větou. Proto jsme museli mít špatný předpoklad a tedy FB je kolmá na stěnu $BCC'B'$. Protože FB leží v rovině podstavy, je $BCC'B'$ a tedy i $FEE'F'$ kolmé na podstavu. Stejně ukážeme, že i poslední pár stěn je kolmý na podstavu.