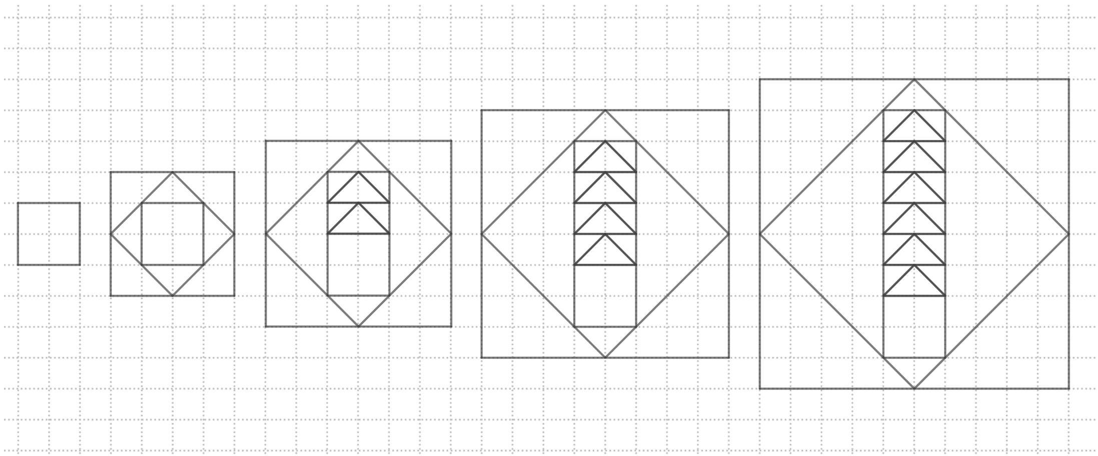
Řešení 1. série

Úvodní guláš

Úloha 1.1. Bubla potřebuje slepit rozbitý stůl do původního tvaru. Protože ale není moc šikovná s nářadím, může ho opravit pouze pomocí několika thaletací (viz dále). Stůl má vždy tvar mnohoúhelníku. Při thaletaci si Bubla vybere nějakou jeho stranu, nad ní sestrojí thaletovu kružnici a pomocí této kružnice připojí k mnohoúhelníku rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, takový, že se nepřekrývá s původním mnohoúhelníkem (například ze čtverce takto může vzniknout pouze "domeček"). Navíc pokud někdy v procesu budou dvě sousední strany svírat úhel 180°, dále s nimi budeme pracovat jako s jednou stranou. Pokud Bubla začíná se stolem tvaru čtverce o straně délky 1, dokáže vytvořit čtverce o straně délky 2, respektive 3, 4 a 5?

Řešení. Obecně nejprve rozšíříme čtverec do výšky a výsledný obdélník obeskládáme dalšími trojúhelníky, viz obrázek:



Úloha 1.2. Zjistil, že pokud vybere libovolný rovnoběžník, jehož rohy jsou některá tlačítka na klasickém číselníku (viz obrázek) a z těchto tlačítek vytvoří číslo tak, aby pořadí odpovídalo pořadí na obvodu čtyřúhelníka proti směru hodinových ručiček, bude toto číslo dělitelné 11. Umíš to dokázat?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Příkladem takového čísla je 1705. Platí $1705 = 11 \cdot 155$.

BRKOS Team 2019

Řešení. Číslo je dělitelné 11, je-li rozdíl součtu číslic na sudém a lichém místě dělitelný jedenácti. Nejprve dokážeme požadovanou dělitelnost pro číselník bez nuly. Cifry výsledného čísla označme popořadě a, b, c, d. Jelikož jsou protilehlé strany rovnoběžníku stejně dlouhé a čísla na číselníku pravidelně uspořádána, platí pro tyto cifry tento vztah:

$$a - d = b - c$$

Ten jde upravit do tvaru:

$$(a + c) - (b + d) = 0$$

Na něm jde hezky vidět, že číslo $abcd$ splňuje podmínku pro dělitelnost 11.

Pro důkaz dělitelnosti u číselníku s nulou si stačí uvědomit, že pokud by číselník obsahoval čísla od 1 do 12, stála by nula na místě s číslem 11. Rovnoběžníky s nulou tedy budou mít rozdíl o 11 menší, než kdyby na stejném místě byla jedenáctka. To ale znamená, že i v tomto případě bude výsledné číslo splňovat dělitelnost 11.

Úloha 1.3. Kouma a Ňouma si postavili výtah, který má nekonečnou šachtu a pouze dvě podlaží vzdálená od sebe 1, a hrají v něm hru. Hra se odehrává v kolech. Každé kolo Kouma řekne nějakou vzdálenost (třeba i iracionální) a Ňouma si v reakci na to vybere jeden ze dvou možných směrů (nahoru, dolů). Pak se s kabinou posunou vybraným směrem o vybranou vzdálenost. Kouma vyhraje, když se mu podaří donutit Ňoumu, aby se dostal do nějakého podlaží. Kde všude v šachtě se na začátku hry může kabina s hochy nacházet, aby měl Kouma zaručené vítězství bez ohledu na Ňoumova rozhodnutí?

Řešení. Výtah jistě musí být na začátku někde mezi patry (kdy byl nad/pod oběma, Ňouma může volit směr tak, aby se od obou pater neustále vzdalovali). Bez újmy na obecnosti řekněme, že dolní patro je ve výšce 0 a horní patro ve výšce 1. V tomto případě řešením bude jakákoliv pozice ve tvaru $\frac{k}{2^n}$, kde $0 \leq k \leq 2^n$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pro korektní řešení je jednak třeba ukázat, že libovolná pozice v tomto tvaru je řešením, jednak, že jakákoliv jiná pozice řešením není.

Ukažme matematickou indukcí vzhledem k n, že každé číslo $\frac{k}{2^n}$ je pro Koumu výherní. Pro $n = 0$ máme čísla 0 a 1, pro která Koumovi stačí říct 0. Nyní předpokládejme, že pro dané n jsou všechny pozice $\frac{j}{2^n}$ (kde $0 \leq j \leq 2^n$) výherní a dokažme, že každá pozice ve tvaru $\frac{k}{2^{n+1}}$ (kde $0 \leq k \leq 2^{n+1}$) je rovněž výherní. Pokud je k sudé (tedy lze zapsat jako $k = 2l$), tak se jedná o výherní pozici, neboť $\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{2l}{2^{n+1}} = \frac{l}{2^n}$ je výherní podle indukčního předpokladu. V případě, že k je liché, tak Kouma může říct $\frac{1}{2^{n+1}}$ a tak se dostane na výherní pozici, neboť čísla $k + 1$ i $k - 1$ obě patří do intervalu $[0, 2^{n+1}]$ a jsou sudá (a zlomek lze proto zkrátit jako v předchozím případu). Bez ohledu na volbu směru se proto Kouma dostane do výherního stavu.

Nyní ukážeme, že žádná jiná pozice není výherní. To ukážeme sporem, ale nejdříve učiníme následující pozorování: nechť $0 \leq b \leq 1$ je libovolné výherní počáteční číslo (tj. pokud na začátku výtah stojí ve výšce b, Kouma vyhraje). To znamená, že Ňouma se v něm dokáže bránit jen konečně mnoho tahů. Navíc vždy může hrát tak, aby jeho obrana trvala co nejvíc tahů. Tento maximální počet tahů, který se dokáže bránit, označme $T(b)$ pro číslo b. Protože každému vyhrávajícímu číslu b můžeme přidělit takovéto přirozené číslo $T(b)$, můžeme podle něj čísla b uspořádat.

Nyní se můžeme pustit do důkazu sporem. Pro spor předpokládejme, že existuje výherní počáteční pozice a, která nelze zapsat ve tvaru $\frac{k}{2^n}$, kde $0 \leq k \leq 2^n$ a $n \in \mathbb{N}_0$. O a můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je to výherní číslo s minimální možnou hodnotou

$T(a)$, které nelze napsat v $\frac{k}{2^n}$, kde $0 \leq k \leq 2^n$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Jelikož a je výherní číslo, musí existovat číslo d tak, že $a + d$ i $a - d$ jsou výherní. Zároveň z definice T musí platit, že $T(a + d) < T(a)$ i $T(a - d) < T(a)$, a jelikož a je takové, že má hodnotu $T(a)$ nejmenší možnou, přičemž není ve tvaru $\frac{k}{2^n}$ ($k \in [0, 2^n]$), pak $a + d$, respektive $a - d$ musí být výherní čísla, pro které tato vlastnost neplatí. Tedy lze je zapsat ve tvaru $\frac{k}{2^n}$, respektive $\frac{l}{2^m}$ ($k \in [0, 2^n], l \in [0, 2^m]$). Jelikož a je průměrem takových dvou čísel, tak lze v tomto tvaru rovněž napsat. To je spor s předpokladem o tvaru a. Proto takové minimální a nemůže existovat, a tedy neexistuje žádné výherní číslo, které není ve tvaru $\frac{k}{2^n}$.

Úloha 1.4. Nechť p je liché prvočíslo. V Hloupětíně je $p^2 + p$ vážených mužů, kteří se chtějí rozdělit do klubů. Rozdělují se následujícím způsobem: Každý si vybere některé přirozené číslo n a spočítá svůj identifikační kód jako n^2+n. Při rozdělování pak musí platit, že dva muži jsou ve stejném klubu právě tehdy, když p dělí rozdíl jejich identifikačních kódů. Nechť m značí počet členů klubu, který má nejvíce členů. Určete nejmenší možné m a dokažte, že se jedná opravdu o nejmenší možnou hodnotu.

Řešení. Podle Dirichletova principu musí existovat klub, který obsahuje aspoň $\frac{p^2+p}{k}$ lidí, kde k je počet klubů. S rostoucím počtem klubů tato hodnota klesá. Ukážeme proto, jaký je maximální možný počet klubů a pro tento počet klubů dále ukážeme, že v každém z nich může být stejný počet lidí. Pak bude hodnota m minimální.

Nechť x, k jsou nějaká přirozená čísla. Ukážeme, že kódy $x^2 + x$ a $(x + pk)^2 + (x + pk)$ dávají stejný zbytek po dělení p. Druhý kód můžeme dále upravovat $(x+pk)^2 + (x+pk) = x^2 + 2xpk + p^2k^2 + x + pk = x^2 + x + p(2xk + k^2 + k)$. Zřejmě zbytek po dělení p se nezmění, odečteme-li libovolný p-násobek. Proto oba kódy dávají stejný zbytek po dělení p a proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všichni muži si volí čísla z množiny $\{0, ..., p - 1\}$.

Pokud je rozdíl dvou čísel $x^2 + x$ a $y^2 + y$ delitelný p, znamená to, že $p \mid x^2 + x - y^2 - y$. To lze dále upravit takto $x^2 + x - y^2 - y = x^2 - y^2 + (x - y) = (x - y)(x + y) + (x - y) = (x + y + 1)(x - y)$. Pokud prvočíslo dělí součin dvou čísel, musí dělit jedno z nich. Tedy dva lidé s kódy $x^2 + x$ a $y^2 + y$ jsou spolu v klubu právě tehdy, když platí buď $p \mid x - y$ nebo $p \mid x + y + 1$. První podmínka říká, že x i y dávají stejný zbytek po dělení p. Protože jsme se již omezili pouze na $x, y \in \{0, ..., p - 1\}$, je tato podmínka triviální. Druhá říká, že $x + y + 1 = pk$ pro nějaké celé číslo k. To znamená $y = pk - x - 1$. S omezením $x, y \in \{0, ..., p - 1\}$ můžeme tuto rovnici přepsat na $y = p - 1 - x$. Proto jsou ve stejném klubu právě dvojice $(0, p-1), (1, p-2), (2, p-3), ..., (\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2})$. Navíc ostatní dvojice prvků z $\{0, ..., p-1\}$ zjevně nesplňují ani jednu z podmínek, a proto se nachází v různých klubech. Tedy klubů bude nejvýše $\frac{p+1}{2}$, přičemž tohoto počtu lze dosáhnout: stačí požadovat, aby každé z čísel od nuly do $p - 1$ bylo zvoleno alespoň jedním mužem ke tvorbě kódu. Protože $\frac{p+1}{2}$ je celé číslo a dělí $p^2 + p$, je minimální hodnota $m = \frac{p+1}{2}$.

Úloha 1.A. Čtverec nazvěme mimořádný, jestliže každá jeho úhlopříčka má stejně obarvené koncové body, avšak vrcholy nejsou obarveny všechny stejně.

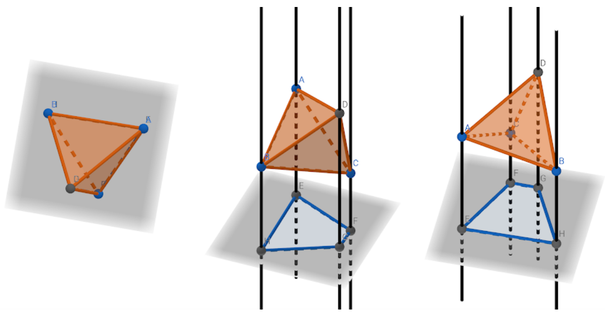
Ukažte, že na sféře se středem S libovolně obarvené dvěma barvami najdeme vždy čtyři body tvořící čtverec se středem S, který není mimořádný.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že existuje obarvení sféry se středem v bodě S, kde všechny čtverce se středem S jsou mimořádné. Zvolme libovolný čtverec $ABCD$ se středem

S, ten je dle předpokladu mimořádný a tedy body A a C mají barvu 1 a B a D mají barvu 2. Nyní zvolme čtverec $AECF$, který je kolmý na čtverec $ABCD$ (roviny ABC a AEC jsou na sebe kolmé). Pak i tento čtverec je podle předpokladu mimořádný a tedy body E a F mají barvu 2. Pak ale body B, E, C a F jsou vrcholy čtverce $BECF$, který má střed S, ale jistě mimořádný není, neboť všechny jeho vrcholy jsou obarveny pouze jednou barvou. To je spor.

Úloha 1.B. V prostoru je zadán pravidelný čtyřstěn. Kolik existuje "nekonečně dlouhých" válců, které obsahují ve svém plášti všechny 4 vrcholy čtyřstěnu? Dva válce považujeme za různé, pokud mají různé osy nebo poloměry.

Řešení. Uvažmě dvě protější strany čtyřstěnu (mimoběžky) a jejich osu (přímka krotínající obě dvě, která je na obě kolmá). Nyní promítneme-li čtyřstěn na jakoukoli rovinu (průmětnu) rovnoběžnou s touto osou, získáme lichoběžník (viz obrázek). Jemu lze opsat kružnice a tu potom vytáhneme do nekonečného válce (kolmo na průmětnu, neboli ve směru promítání, válec má tak podstavy v nekonečnu). Takto sestrojených průměten a válců z nich můžeme sestrojit nekonečně mnoho a všechny válce budou obsahovat vrcholy čtyřstěnu.



Úloha 1.C. Najděte všechny konečné podmnožiny $S \subset \mathbb{N}_0$ takové, že $S^+ = S^\times$.

Zde S^+ je množina všech takových čísel z $\mathbb{N}_0$, která lze získat jako součet všech prvků některé neprázdné podmnožiny S. Podobně $S^\times$ je množina všech takových čísel z $\mathbb{N}_0$, která lze získat jako součin všech prvků některé neprázdné podmnožiny S.

Tedy pro $S = \{1, 3, 4\}$ dostáváme: $S^+ = \{1, 3, 4, 1 + 3, 1 + 4, 3 + 4, 1 + 3 + 4\} = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ a $S^\times = \{1, 3, 4, 1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 3 \cdot 4, 1 \cdot 3 \cdot 4\} = \{1, 3, 4, 12\}$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že platí následující tvrzení: Množina $S \subset \mathbb{N}$ je řešením právě tehdy, když je řešením $S \cup \{0\}$. Toto platí, jelikož máme následující množinovou rovnost:

$$\begin{aligned}(S \cup \{0\})^+ &= \left\{\sum_{x\in A} x | A \subseteq S, A \neq \emptyset\right\} \cup \left\{\sum_{x\in A\cup\{0\}} x | A \subseteq S, A \neq \emptyset\right\} \cup \{0\}\\ &= \left\{\sum_{x\in A} x | A \subseteq S, A \neq \emptyset\right\} \cup \left\{0 + \sum_{x\in A} x | A \subseteq S, A \neq \emptyset\right\} \cup \{0\}\\ &= \left\{\sum_{x\in A} x | A \subseteq S, A \neq \emptyset\right\} \cup \{0\}\\ &= S^+ \cup \{0\}.\end{aligned}$$

Analogicky (rozepsáním na ty součiny, které nulu obsahují a na ty, které ji neobsahují) bychom dostali, že $(S\cup\{0\})^\times = S^\times \cup \{0\}$. Proto pokud pro libovolnou konečnou $S \subset \mathbb{N}$ platí $S^+ = S^\times$, tak musí platit i $(S \cup \{0\})^+ = S^+ \cup \{0\} = S^\times \cup \{0\} = (S \cup \{0\})^\times$. A analogicky pokud $(S \cup \{0\})^+ = (S \cup \{0\})^\times$, tak odebráním nuly z těchto množin dostaneme, že $S^+ = S^\times$. Díky tomu nám stačí omezit se na $S \subset \mathbb{N}$, jelikož všechna řešení obsahující nulu dostaneme tak, že nulu přidáme k nějakému řešení, které nulu neobsahuje. Navíc prázdná množina je zřejmě řešením, jelikož její součtová i součinová množina jsou zase prázdné, takže odteď můžeme předpokládat, že S je neprázdná. Předpokládejme tedy, že pro $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ platí $S^+ = S^\times$. Potom pro tyto množiny musí zejména platit, že jsou si rovny jejich největší prvky (které v případě konečných množin určitě existují). Největší prvek množiny S^+ je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, jelikož se jedná o množinu kladných čísel. A největší prvek množiny $S^\times$ je $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ (jelikož $S^\times$ je množina čísel větších než jedna). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_1$ (nerovnosti jsou ostré, jelikož v množině se nesmí opakovat prvky). Potom platí: $na_n \geq a_1 + \ldots + a_n = a_1 \cdots a_n$. Navíc platí, že $a_i \geq i$ pro každé $i \in \{1, 2 \ldots n\}$, jelikož a_i je přirozené číslo, které pod sebou má alespoň $i - 1$ přirozených čísel. Odtud podělením předcházející nerovnosti kladným číslem a_n dostáváme $n \geq a_{n-1} \cdots a_1 \geq (n-1)!$. Indukcí ukažme, že pro $n \geq 4$ toto nemůže nastat, tedy že $(n - 1)! > n$:
Bázový krok: $n = 4$, pak $(n - 1)! = 3! = 6 > 4 = n$.
Indukční krok: nechť $(n - 1)! > n$ a ukažme, že $n! > n + 1$:

$$n! = n \cdot (n - 1)! > n \cdot n > 2n = n + n > n + 1.$$

Přičemž poslední dvě nerovnosti platí, jelikož řešíme jen ta n, která jsou ostře větší než 3. Takže aby mohlo nastat $S^+ = S^\times$, tak musí platit, že S má nanejvýš 3 prvky. Rozeberme tyto případy zvlášť:
Pokud S má jeden prvek, tak dostáváme, že $S^+ = S^\times = S$, tedy všechny jednoprvkové množiny jsou řešením.
Pokud má S dva prvky, tak by muselo nastat (zase porovnáním největších prvků) $a_1+a_2 = a_1a_2$, což lze upravit do tvaru $(a_1-1)(a_2-1) = 1$. A jelikož jednička lze napsat jako součin celých čísel pouze jako $1\cdot 1$ nebo $-1 \cdot -1$, tak v obou případech dostáváme, že $a_1 = a_2$, což je spor s tím, že S je dvouprvková množina.
Zbývá vyřešit případ, kdy S je tříprvková množina. Víme, že platí $3 \geq a_2a_1$, což může nastat pouze ve dvou případech – když $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$, nebo $a_1 = 1$ a $a_2 = 3$. V prvním případě dostaneme (zase porovnáním největších prvků) rovnost $a_3 + 2 + 1 = a_3 \cdot 2 \cdot 1$, tedy $a_3 = 3$, ale množina $\{1, 2, 3\}$ zadání nevyhovuje, jelikož $5 \in \{1, 2, 3\}^+$, ale $5 \notin \{1, 2, 3\}^\times$. Ve druhém případě dostaneme rovnost $a_3 + 3 + 1 = a_3 \cdot 3 \cdot 1$, ze které vyplývá, že $a_3 = 2$,

což nemůže nastat, jelikož jsme předpokládali, že $a_3 > a_2$. Takže S nemůže být tříprvková. Dohromady tedy dostáváme řešení $S = \emptyset$, $S = k$, kde $k \in \mathbb{N}$, a ta, která dostaneme, když k těmto přidáme nulu: $S = 0$ a $S = 0, k$, $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.D. Turnaje se účastní $n \in \mathbb{N}$ účastníků, kde každí dva spolu hrají právě jednou. Soupeři si navzájem dávají facky, dokud jeden z nich neomdlí. Tento hráč souboj prohrává. Každý souboj má tedy právě jednoho vítěze a jednoho poraženého. O turnaji víme, že v každé čtveřici účastníků existuje absolutní vítěz nebo absolutní poražený. Absolutní vítěz (respektive poražený) je takový hráč, který porazil všechny ostatní hráče z příslušné čtveřice (respektive je poražen všemi ostatními hráči ze čtveřice).

Na konci turnaje si Liběnka na prázdnou tabuli nakreslila tečku za každého účastníka a přidala šipku mezi každou dvojici teček tak, že vedla od vítěze k poraženému. Kolik existuje možných výsledků turnaje. O dvojici výsledků řekneme, že jsou stejné, pokud lze pro oba výsledky nakreslit stejný obrázek.

Například výsledky turnaje $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ a $\{(b, a), (a, c), (b, c)\}$ jsou považovány za stejné, zatímco výsledek turnaje $\{(a, c), (c, b), (b, a)\}$ je považován za odlišný (kde (a, b) značí, že a porazil b).

Řešení. Pro přehlednost značme $a \to b$ fakt, že a porazil b. Dále řekneme, že turnaj je dobře utvořený, pokud pro každou čtveřici hráčů existuje absolutní vítěz či poražený.

Nejdříve ukažme, že v turnaji nemohou být 4 účastnící a, b, c, d takoví, že $a \to b \to c \to d \to a$. Pak totiž každý z nich má v této čtveřici aspoň jednu výhru a aspoň jednu prohru, proto mezi nimi neexistuje absolutní vítěz ani poražený.

Dále nechť a, b, c jsou libovolní tři účastníci takoví, že $a \to b \to c \to a$. Pokud libovolní tři hráči tento cyklický vztah splňují, řekneme, že tvoří trojúhelník. Nechť d je libovolný jiný hráč. Pak nutně musí buď d porazit všechny hráče a, b, c, nebo a, b, c musí porazit hráče d. V opačném případě by ve čtveřici a, b, c, d neexistoval absolutní vítěz ani poražený. Můžeme proto označit $M_>$ množinu všech hráčů d takových, že $d \to a, b, c$ a $M_<$ množinu všech hráčů e takových, že $a, b, c \to e$. Ukážeme, že pro libovolné $d \in M_>, e \in M_<$ platí $d \to e$. Pro spor předpokládejme, že platí naopak $e \to d$. Pak se ovšem v turnaji nachází takoví hráči, že $d \to a \to b \to e \to d$. To podle prvního odstavce není možné, a proto nutně $d \to e$.

Nyní víme, že pokud tři hráči tvoří trojúhelník, pak rozdělují zbytek hráčů na dvě množiny $M_>$ a $M_<$ takové, že libovolný hráč z $M_>$ porazí libovolného hráče z $M_<$. Nechť m je hráč s maximálním počtem výher. Pak mohou nastat dva případy. Buď je hráč a součástí nějakého trojúhelníku, nebo není.

Pokud je m součástí trojúhelníku, pak existují hráči n, o, kteří s ním jsou v trojúhelníku. Navíc zbytek hráčů lze podle trojice m, n, o rozdělit do výše popsaných množin $M_<$ a $M_>$. Ukážeme, že $M_>$ je prázdná. Pro spor předpokládejme, že v ní existuje hráč p. Pak ovšem p porazil všechny hráče, které m a navíc i samotného m. Proto m neporazil maximum hráčů, což je spor. Tedy $M_>$ je prázdná. Nechť se turnaje účastní n hráčů. Pak $|M_<| = n - 3$. Ukážeme, že pokud tvoří hráči z $M_<$ dobře utvořený turnaj o $n - 3$ hráčích, pak je dobře utvořen i původní turnaj. Nechť a, b, c, d je libovolná čtveřice hráčů. Pokud ani jeden z hráčů nepatří do trojice m, n, o pak všichni patří do turnaje tvořeného hráči $M_<$, a protože je dobře utvořený, existuje mezi nimi absolutní vítěz nebo poražený. Pokud BÚNO právě a patří do trojice m, n, o, pak a porazil b, c, d, a je proto absolutní vítěz. Pokud BÚNO a, b patří do m, n, o a $a \to b$, pak a porazil i b a c, a je tedy absolutní vítěz. Pokud v posledním případě BÚNO právě a nepatří do m, n, o, pak je poražen všemi hráči b, c, d, a je proto absolutní poražený. Každá čtveřice má absolutního vítěze či poraženého a proto je celý turnaj dobře utvořený.

Nechť m není součástí žádného trojúhelníku. Pak označme opět množiny všech hráčů, kteří ho porazili respektive jím byli poraženi $M_>$ respektive $M_<$. Zřejmě neexistují hráči $n \in M_<, o \in M_>$ takoví, že $n \to o$, protože pak $n \to o \to m \to n$ je trojúhelník, jehož je m součástí, ale m není v žádném trojúhelníku. Navíc $M_>$ je opět prázdná, protože jinak by existoval prvek $o \in M_>$, který porazil všechny hráče, které porazil m a navíc porazil i samotného m. To je spor s volbou m jakožto hráče s maximálním počtem výher. Pokud hráči v $M_<$ spolu tvoří dobře utvořený turnaj, pak každá čtveřice mezi nimi splňuje podmínku ze zadání a každá čtveřice, která obsahuje m, obsahuje absolutního vítěze, což je m.

Nechť $P(n)$ značí počet možných výsledků dobře utvořených turnajů o n hráčích. Zřejmě pro počty účastníků $1, 2$ platí $P(1) = P(2) = 1$. Pokud hrají tři hráči, můžou a nemusí tvořit kružnici, tedy $P(3) = 2$. $P(n)$ pro libovolný větší počet účastníků vyjádříme v závislosti na hodnotě P pro turnaje menší velikosti. Jak je dokázáno výše, libovolný dobře utvořený turnaj obsahuje buď hráče, který porazil všechny ostatní, nebo trojici hráčů, kteří tvoří kružnici a porazili všechny ostatní. V obou případech je výsledný turnaj dobře utvořený právě tehdy, když je dobře utvořený turnaj obsahující jen hráče, kteří nemají maximální počet výher. Proto platí pro $n > 3$ $P(n) = P(n-1) + P(n-3)$. Tím jsme úplně charakterizovali počty možných turnajů pro libovolný počet hráčů $n \in \mathbb{N}$.