Řešení 6. série

Zobrazení v prostoru

Úloha 6.1. Dodnes se ten objekt snažím popsat. Byl středově souměrný, ale nebyl osově souměrný ani rovinově souměrný (rovinová souměrnost je zrcadlení podle nějaké roviny).

Řešení. Jestliže má být objekt středově souměrný, vyberme si bod S = [0, 0, 0] jako střed souměrnosti. Přidejme ho do našeho tělesa. Kdykoliv přidáme bod do našeho tělesa, musíme přidat i bod středově souměrný s tímto bodem. Zároveň budeme vybírat body tak, abychom zakázali osovou i rovinovou souměrnost. Zvolme libovolný bod $A = [1, 0, 0]$ a přidejme ho do našeho tělesa (a tedy i bod $A' = [-1, 0, 0]$). Těleso je zřejmě osově souměrné například podle osy procházející body A a A'. Přidejme nyní body $B = [1, 1, 0]$ a $B' = [-1, -1, 0]$.

Ukažme, že jediná osa, podle které je toto těleso souměrné, je přímka procházející počátkem a kolmá na rovinu ρ určenou body A, A', B a B' (tedy přímka $p : z = t, y = 0, x = 0, t \in \mathbb{R}$). Nechť je osa obsažena v rovině ρ. Vidíme, že v této rovině útvar jistě není osově souměrný. Zřejmě tedy musí být osa různoběžná s rovinou ρ. Aby ale mohla zobrazit body na sebe, musí být a rovinu ρ kolmá.

Nyní vysvětleme, že jediná rovina, podle které je toto těleso souměrné, je rovina $z = 0$. Stejně jako v předchozím případě, musí být alespoň jeden bod samodružný. Vidíme, že samodružných bodů nemůže být ani 1, ani 3, tedy musí být samodružné všechny a tedy jediná rovina, která je rovinou souměrnosti, je $z = 0$.

Přidáním dalších bodů $C = [1, 1, 1]$ a $C' = [-1, -1, -1]$ jistě vidíme, že přímka p i rovina ρ zobrazí bod C jinam, než na bod C', tedy těleso složené z bodů A, A', B, B', C, C' není osově ani rovinově souměrně.

Úloha 6.2. S Agnes jsme se ocitli v prostoru nekonečných možností. Byli jsme jako dvě mouchy (body), které poletují v prostoru dřezu. Uprostřed dřezu se nacházela svislá přímka časoprostoru, připomínající vodu tekoucí z kohoutku. Jak jen nalézt nejkratší cestu od jedné mouchy ke druhé mouše tak, aby cestou nabrala vodu (tj. aby cesta protínala přímku)? Dokažte, že jste našli nejkratší.

Řešení. Pro začátek si označíme mouchy A, B a proud vody jako p.

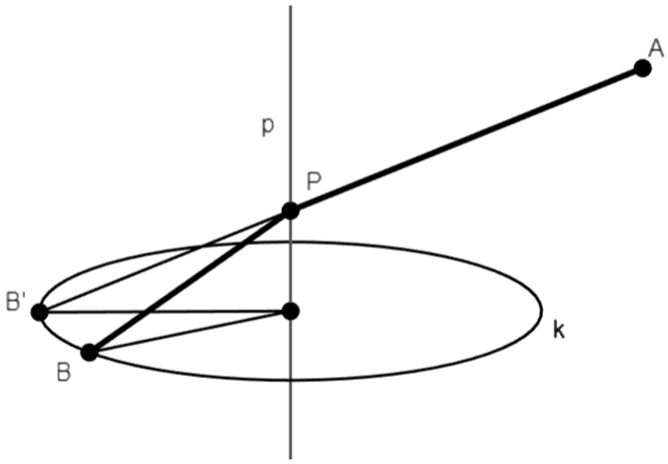
Označme si k kružnici, která leží v rovině kolmé na p, její střed leží na p a prochází bodem B.

Máme intuici, že pro libovolný bod K, který leží na kružnici k platí, že nejkratší cesta z bodu A přes přímku p do bodu K je stejně dlouhá jako nejkratší cesta z bodu A přes p do bodu B.

Označíme si B' bod, který leží na kružnici k, v polorovině opačné k polorovině určené přímkou p a bodem A. Takový bod je zřejmě právě jeden.

Nejkratší vzdálenost z bodu A do bodu B' je zřejmě úsečka AB', která prochází i přímkou p, takže je to i nejkratší cesta z bodu A přes přímku p do bodu B'. Průsečík AB' a p

označíme P.



Usnadníme si práci *pomocným tvrzením*:

Pro libovolný bod P' ležící na přímce p a libovolné body K_1, K_2 ležící na kružnici k platí, že $|P'K_1| = |P'K_2|$. Toto tvrzení platí, jelikož k leží v rovině kolmé na p a střed k leží na přímce p. Lze dokázat např. z věty *sus*, když uvážíme roviny určené přímkou p a bodem K_1, případně K_2.

Budeme se snažit dokázat, že nejkratší cesta z A přes p do B je spojená ze dvou úseček AP a PB.

Pro *spor* předpokládejme, že existuje bod $P' \in p$, pro který platí, že cesta z A přes P' do B je kratší, než $|AP| + |PB|$.

Pak zřejmě platí, že $|AP'|+|P'B| < |AP|+|PB|$ (jelikož úsečka je nejkratší vzdálenost mezi dvěma body). Podle pomocného tvrzení, ale platí, že $|PB| = |PB'|$ a $|P'B| = |P'B'|$. Tedy platí, že $|AP'| + |P'B'| < |AP| + |PB'|$, tedy, že existuje kratší cesta mezi body A a B', než je po úsečce AB' (platí $P \in AB'$), což je spor.

$\Rightarrow$ Nejkratší cesta mezi body A a B přes přímku p je spojení úseček AP a PB.

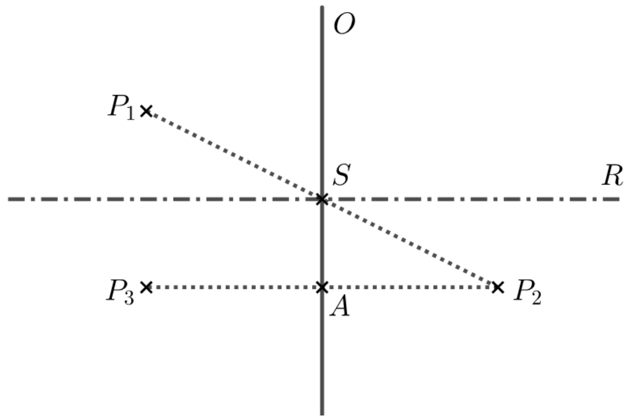
Úloha 6.3. Potřeboval jsem dokázat, že v prostoru neexistuje omezený objekt (tj. že neexistuje krabice, do které se objekt celý vleze), který by byl středově souměrný, osově souměrný, ale ne rovinově souměrný (1 bod). Musel jsem tedy popsat neomezený objekt, který tyto souměrnosti splňuje (3 body).

Řešení. Ve svém řešení budu pro jednoduchost zaměňovat názvy bodů (přímek) a jim příslušných středových (osových) symetrií.

Předpokládejme, že existuje osově i středově symetrická množina bodů M, která lze ohraničit. Ukážeme, že pak nutně musí být i rovinově souměrná. Zvolme některý bod, podle kterého je množina středově souměrná a nazvěme ho S, stejně tak některou z os nazvěme O. Mohou nastat dva případy.

$S \in O$: Pak ukážeme, že M je symetrická podle roviny procházející S a kolmá na O. Zvolme libovolný bod P_1 patřící do M. Zřejmě v M existuje jeho obraz P_2 ve středové symetrii S, a proto v M také existuje obraz bodu P_2, bod P_3. Nyní stačí dokázat, že P_3 je také obrazem P_1 v rovinové symetrii podle roviny kolmé na O a procházející S. Kolmý průmět této roviny do roviny $P_1P_2P_3$ je přímka R. Stačí tedy ukázat, že P_3 je obrazem P_1 v osové symetrii podle R. Trojúhelníky ASP_2 a $P_{P1}P_2$ jsou zřejmě podobné s koeficientem

2. Protože navíc R je kolmé na O musí být také R kolmé na P_1P_3. Dále $|P_1P_3| = 2|SA|$, a proto R půlí úsečku P_1P_3. Dohromady je tedy R osou úsečky P_1P_3, což jsme chtěli ukázat.



$S \notin O$: Množina M je symetrická podle osy O. Pokud M zobrazím podle S získám množinu M', která je také osově symetrická, ale tentokrát podle osy O', která je obrazem osy O v S. Ovšem protože M je také symetrická podle S víme, že $M = M'$. Proto M je symetrické podle osy O i podle osy O'. Podobně lze ukázat, že M je středově symetrická nejen podle středu S, ale také podle středu S', který je obrazem body S v O'. Iterováním tohoto procesu získáme libovolně dlouhou posloupnost os a středů symetrií množiny M. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|SS'| = 1$. Pak pro libovolnou vzdálenost n můžeme zvolit S s n čárkami. Tento bod se bude nacházet ve vzdálenosti n od S, a tedy i v M budou dva body se vzdáleností aspoň n. To je ovšem spor s ohraničeností množiny, a proto neexistuje ohraničená množina, jejíž střed souměrnosti neleží na její ose souměrnosti.

Zkonstruujme nyní neohraničenou množinu M, která je osově i středově souměrná, ale není rovinově souměrná. Nechť je tedy M množina bodů P_i pro všechna $i \in \mathbb{Z} \setminus 0$, kde souřadnice bodu $P_i[x, y, z]$ jsou zadány takto:

$$x = 2i - \operatorname{sgn}(i)$$

$$y = (-1)^{\lfloor \frac{|i|}{2} \rfloor}$$

$$z = \operatorname{sgn}(i) \cdot (-1)^i$$

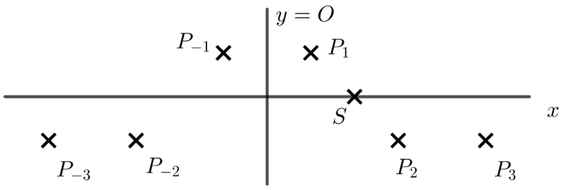
Tato množina je osově souměrná podle souřadnicové osy y (tedy přímka splňující rovnice x=z=0). V této symetrii je obrazem každého bodu P_i bod P_{-i}, protože:

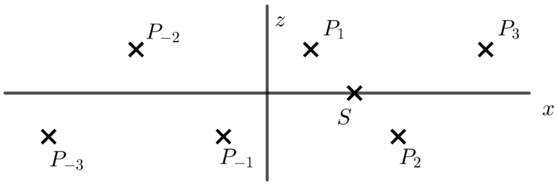
$$P_i(x) = 2i - \operatorname{sgn}(i) = (-1)(2(-i) - \operatorname{sgn}(-i)) = -P_{-i}(x)$$

$$P_i(y) = (-1)^{\lfloor \frac{|i|}{2} \rfloor} = (-1)^{\lfloor \frac{|-i|}{2} \rfloor} = P_{-i}(y)$$

$$P_i(z) = \operatorname{sgn}(i) \cdot (-1)^i = (-1)(-\operatorname{sgn}(i) \cdot (-1)^i = (-1)(\operatorname{sgn}(-i) \cdot (-1)^(- i) = -P_{-i}(z)$$

Navíc je množina M také středově souměrná podle středu $S[1, 0, 0]$. Zde P_2 a P_1 se zobrazí na sebe navzájem a pro všechny ostatní body P_i je jejich obrazem bod $P_{-i+2\operatorname{sgn}(i)}$. Pomocí podobných úprav jako výše, nebo přímo z obrázku vyplývá platnost tohoto tvrzení.





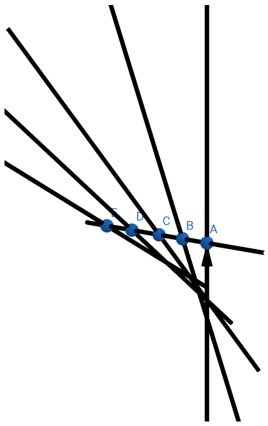
Nyní jen stačí dokázat, že množina skutečně není rovinově souměrná. Pro spor předpokládejme, že M rovinově souměrná je. Je vidět, že všechny body množiny M lze uzavřít do nekonečně vysokého válce V. Nechť R je rovina symetrie množiny M. Mohou nastat 2 možnosti: R není rovnoběžná s žádnou rovinou souměrnosti válce V. Pak obraz množiny M leží v obrazu válce R. Zároveň protože M je symetrická podle R, je M přímo rovno obrazu M v symetrii R. Proto M musí ležet v průniku válce V a obrazu V symetrii R. Jelikož R není rovnoběžné s některou rovinou symetrie válce V, je průnik V a jeho obrazu v R ohraničená množina. Proto i M je ohraničená množina, ale z definice M vidíme, že ohraničená není. Tedy došli jsme ke sporu. R je rovnoběžná s některou rovinou souměrnosti V. Pak R je rovina rovnoběžná se souřadnicovou osou x, nebo rovina rovnoběžná zároveň s osami y a z. Jelikož v M existuje pro každé $v \in \mathbb{R}$ nejvýše jeden bod se souřadnicí x rovnou v, může být R rovnoběžné s osou x pouze pokud by se všechny body podle R zobrazily na sebe, tedy všechny body by ležely ve stejné rovině. To ovšem neplatí. Proto předpokládejme, že rovina R je kolmá na souřadnicovou osu x. Z prvního obrázku lze vyčíst, že pokud je R rovinou souměrnosti M, musí R procházet právě mezi některými dvěma body P_i P_{i+1}. Z druhého obrázku ovšem vyplývá, že rovina musí procházet některým bodem P_j. Proto taková rovina R nemůže existovat.

Úloha 6.4. Hledáme zobrazení klasického 3D prostoru $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ (libovolný bod prostoru zobrazí na nějaký bod prostoru) takové, že pro všechny body $A, B \in \mathbb{E}_3$ platí:

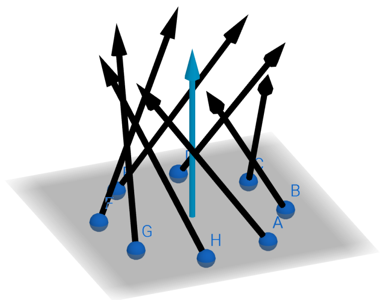
- $|Af(A)| = 1$,
- $\overleftrightarrow{Af(A)} \parallel \overleftrightarrow{Bf(B)} \Leftrightarrow B \in \overleftrightarrow{Af(A)}$.

Řešení. Z podmínek plyne, že je prostor rozdělený do přímek, které jsou po dvou mimoběžné. Toto však dokazovat nemusíme, neboť se po nás chce pouze najít jedno takové zobrazení a pro něj ukázat podmínky, čili druhá implikace.

Mějme v prostoru libovolnou rovinu ρ (např. vodorovnou) a v ní počátek P. V rovině ρ pak zvolme bod A a označme $p(A)$ přímku $Af(A)$. Dále označme $\phi(A)$ úhel, který svírá $p(A)$ s normálou n_ρ, čili s kolmicí (svislicí) na ρ procházející A. Pro naše účely zaveďme, že přímka $p(A)$ je vždy kolmá na spojnici AP (nemusí však být nutně kolmá na rovinu ρ) a že $\phi(A) = \arctan |AP|$ (viz obrázek - přímky se tím víc „pokládají“, čím jsou dále od středu).

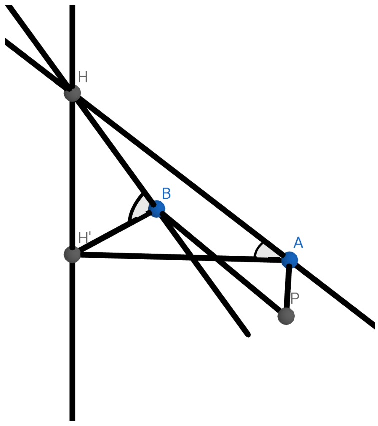


Uvažme libovolnou kružnici $k \subset \rho$ se středem v počátku a označme hyperboloid $h(k) = \bigcup_{A \in k} p(A)$, čili sjednocení všech $p(A)$, kde $A \in k$. Body na k mají stejnou vzdálenost od počátku, takže budou mít i stejný úhel $\phi(A)$. Takovéto přímky vytvoří jednodílný rotační hyperboloid. (Není důležitý k řešení úlohy, ale vždyť se na něj podívejte, nesmí tu chybět)



Nyní jen zbývá ukázat, že jsou všechny přímky $p(A), A \in \rho$ mimoběžné, čili nejsou rovnoběžné a nemají společný bod. Kdyby byly $p(A), p(B)$ rovnoběžné, tak $\phi(A) = \phi(B)$, tzn. $|PA| = |PB|$. Jenže pak jsou to přímky v nějakém hyperboloidu a tam rovnoběžky nenajdeme (viz obrázek).

To, že nemají průsečík, ukažme sporem. Uvažme $A, B \in \rho$ tak, že bod B je dál od počátku, než A. (Kdyby byly body stejně daleko od počátku, jejich přímky se neprotnou.) Průsečík označme H a jeho kolmý průmět na ρ H'. Z $AP < BP$ plyne $AH' > BH'$ ($PABH'$ leží na Thaletově kružnici) a proto taky $\phi(A) = |\sphericalangle H'AH| < |\sphericalangle H'BH| = \phi(B)$, což je spor, neboť funkce arctan je rostoucí, takže musí nastat $\phi(A) > \phi(B)$.



Úloha 6.A. Donatella měla v krabici řasenky s různými faktory prodlužování. Byla to podmnožina racionálních čísel, ve které leží přirozená čísla 1 až 9 a navíc v ní s libovolnými dvěma jejími prvky (ne nutně různými) leží i jejich podíl. Rozhodněte, zda v této množině leží číslo 1000000, resp. řasenka s tímto faktorem prodlužování.

Řešení. V krabičce řasenek se opravdu nachází řasenka s faktorem 1000000. Dokázat to lze tak, že ukážeme, že číslo 1000000 lze získat jako podíl některých jiných čísel, která se v množině znázorněné krabičkou řasenek nachází. Pokud bychom dokázali, že je v množině číslo $\frac{1}{10}$, pak bychom ukázali, že v množině je i každé číslo, které lze získat postupným dělením číslem $\frac{1}{10}$, tedy i $\frac{1}{(\frac{1}{10})^n}$, čili 10^n, kde nás v našem případě zajímá $n = 6$. A jelikož jsou v množině ze zadání určitě čísla 1 a 2, můžeme získat $\frac{1}{2}$, a tedy také $\frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, z čehož snadno odvodíme, že v množině bude i číslo $\frac{1}{10}$.

Úloha 6.B. Měl jsem před sebou číselný zámek. Měl jsem uvažovat všechny číselné kódy složené z n cifer $0-9$ (můžou začínat i nulou) a ke každému si napsat jeho ciferný součet. Hádanka spočívala v otázce, který ciferný součet jsem napsal nejvícekrát.

Řešení. Nechť n je přirozené. Je zřejmé, že pak možné ciferné součty kódů délky n jsou 0 až $9n$ (ty odpovídají kódům složeným jen z nul respektive devítek). Můžeme tedy sestrojit posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{9n}$, kde člen a_i vyjadřuje počet n-ciferných kódů s ciferným součtem i.

Řekneme, že posloupnost je symetrická, pokud pro každé i platí $a_i = a_{9n-i}$. Ukažme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je příslušná posloupnost symetrická a neklesající na intervalu $[0, \lfloor \frac{9n}{2} \rfloor]$. Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí.

Zřejmě pro kódy délky 1 je posloupnost počtů ciferných součtů konstantní a každý její člen je roven 1 (protože každý ciferný součet s odpovídá právě kódu s). Proto posloupnost je symetrická a na intervalu $[0, 4]$ konstantní, tedy i neklesající.

Dále předpokládejme, že pro nějaké n tvrzení platí, tedy příslušná posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{9n}$ je symetrická a neklesající na $[0, \frac{9k}{2}]$. Každý $(n+1)$-ciferný kód k můžeme rozdělit na jeho první cifru c a zbylý n-ciferný kód k'. Pokud k má ciferný součet s, pak k' má ciferný součet $s - c$. Dodefinujme prvky a_i pro záporné i a i větší než $9n$ jako $a_i = 0$. Lze si jednoduše rozmyslet, že takto dodefinovaná posloupnost je opět symetrická. Pak počet $(n + 1)$-ciferných kódů s ciferným součtem s můžeme spočítat jako $\sum_{c=0}^{9} a_{s-c}$, kde $\{a_i\}$ je posloupnost pro kódy délky n. Posloupnost $\{b_i\}$ pro kódy délky $n + 1$ můžeme tedy definovat takto:

$$b_s = \sum_{c=0}^{9} a_{s-c}$$

Dokažme, že $\{b_i\}$ je symetrická (ale pro délku $9(n+1)$). Platí $b_s = \sum_{c=0}^{9} a_{s-c} = \sum_{c=0}^{9} a_{9n-(s-c)} = \sum_{c=0}^{9} a_{9n-s+c}$. Protože ovšem c iterujeme od 0 do 9 platí $\sum_{c=0}^{9} a_{9n-s+c} = \sum_{c=0}^{9} a_{9n-s+c} = \sum_{c=0}^{9} a_{9(n+1)-s-c} = b_{9(n+1)-s}$.

Dále víme, že každé dva po sobě jdoucí členy posloupnosti $\{b\}$ jsou každý součtem deseti členů posloupnosti $\{a\}$. Navíc tyto dvě desetice se liší jen v prvním, respektive posledním členu. Protože je navíc posloupnost $\{a\}$ neklesající na první polovině intervalu $[0, 9n]$ a symetrická, pak je také člen, který se nachází v druhé desetici je větší, než člen který se nachází v první desetici. Proto i výsledný druhý součet je větší než součet první. Protože pro každé dva po sobě jdoucí prvky z první poloviny $[0, 9(n+1)]$ platí, že druhý je větší než první, platí také, že celá posloupnost $\{b\}$ je rostoucí na první polovině intervalu $[0, 9(n+1)]$.

Dokázali jsme, že pro každé n je posloupnost počtů výskytů jednotlivých ciferných součtů symetrická a neklesající na první polovině ciferných součtů. Proto největší prvek této posloupnosti se nachází uprostřed. Tedy jedná se o člen s indexem $\lfloor \frac{9n}{2} \rfloor$ a proto nejčastějším ciferným součtem je $\lfloor \frac{9n}{2} \rfloor$.

Úloha 6.C. O úsečce AB řekneme, že je *ÚŽASNÁ*, pokud na Thaletově kružnici nad AB existuje bod C splňující, že délky $|AC|$ a $|BC|$ jsou celočíselné. O čtverci řekneme, že je *ÚŽASNÝ*, pokud jeho obsah je celočíselný a dokonce sudý. Akrobatka chtěla, abych dokázal, že *ÚŽASNÝ* čtverec má *ÚŽASNOU* stranu právě tehdy, když má *ÚŽASNOU* úhlopříčku.

Řešení. Nejprve si dokážeme lemma, které jste všichni používali: *Úsečka AB je úžasná právě tehdy, když rovnice $|AB|^2 = x^2 + y^2$ má řešení v $\mathbb{Z}$.*
Důkaz:
„$\Rightarrow$“: Jestliže je AB úžasná, tak na Thaletově kružnici existuje bod C takový, že $|BC|, |AC| \in \mathbb{Z}$. Pokud $C \in \{B, A\}$, tak $|BC| = 0$ nebo $|AC| = 0$ a druhá z úseček má délku $|AB|$, proto $|AB| \in \mathbb{Z}$ a rovnice $|AB|^2 = x^2 + y^2$ má celočíselné řešení $x = |AB|, y = 0$. Pokud $|AC| \neq 0$ ani $|BC| \neq 0$, tak body A, B, C tvoří pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C, takže v něm platí Pythagorova věta a rovnice $|AB|^2 = x^2 + y^2$ má řešení $x = |BC| \in \mathbb{Z}, y = |AC| \in \mathbb{Z}$.
„$\Leftarrow$“: Předpokládejme nejprve, že má rovnice $|AB|^2 = x^2 + y^2$ celočíselné řešení, pro které platí, že $xy \neq 0$ a uvažme trojúhelník ABC o stranách $|AB|$, x, y. Pak se (podle Pythagorovy věty) jedná o pravoúhlý trojúhelník, a proto bod C leží na Thaletově kružnici nad AB a úsečka AB je úžasná. Nyní rozeberme, druhý případ, kdy rovnice má pouze taková řešení, pro která platí, že x nebo y je 0 – bez újmy na obecnosti, nechť je to x. Pak $|AB|^2 = y^2$, což nám dává $|AB| = |y| \in \mathbb{Z}$. A tedy pokud zvolíme $C = A$, tak C leží na Thaletově kružnici nad AB a $|CB|$ i $|CA|$ jsou celá čísla a lemma je dokázáno a můžeme se přesunout k samotnému příkladu.
Nechť $ABCD$ je úžasný čtverec, označme jeho stranu a. Jelikož je úžasný, tak platí, že $a^2 = 2k$, kde k je nějaké celé číslo. Díky lemmatu můžeme zadání ekvivalentně přeformulovat takto: Nechť k je pevně dané nezáporné celé číslo, ukažte, že rovnice $2k = x^2 + y^2$ má celočíselné řešení právě tehdy, když rovnice $4k = x^2 + y^2$ má celočíselné řešení (zde jsme využili toho, že úhlopříčka v $ABCD$ má délku $\sqrt{2}a$).

Důkaz:
„⇒“: Označme (m, n) libovolné řešení rovnice $2k = x^2 + y^2$, pak platí:

$$4k = 2\left(m^2+n^2\right) = m^2+n^2+m^2+n^2 = \left(m^2+n^2+2mn\right)+\left(-2mn+m^2+n^2\right) = (m+n)^2+(m-n)^2.$$

A tedy rovnice $4k = x^2 + y^2$ má řešení $(x, y) = (m + n, m - n)$.
„⇐“: Označme (m, n) libovolné řešení rovnice $4k = x^2 + y^2$, pak platí, že m i n musí být sudá čísla – pokud by obě byla lichá, tak na pravé straně budeme mít výraz, který dává zbytek dva po vydělení čtyřmi, pokud by bylo právě jedno liché, tak na pravé straně máme dokonce lichý výraz, což v obou případech dává spor s tím, že levá strana je dělitelná čtyřmi. To znamená, že $m = 2c$, $n = 2d$ pro nějaká celá c, d. Nyní dostáváme:

$$2k = \frac{1}{2}\left(m^2+n^2\right) = \frac{1}{2}\left(4c^2+4d^2\right) = 2c^2+2d^2 = (c+d)^2+(c-d)^2.$$

Z čehož vyplývá, že rovnice $2k = x^2 + y^2$ má řešení $(x, y) = (c + d, c - d) = \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right)$ a tvrzení úlohy je dokázáno.

Úloha 6.D. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka, α, β, γ jsou úhly u vrcholů v tomto trojúhelníku. Ukažte, že

$$\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab} \geq \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

Řešení. Nerovnost je možné ukázat mnoha způsoby, z nichž žádný není úplně snadný. Klíčové je použít vztah daný kosinovou větou: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Stručně bych rád naznačil několik možností řešení, které jste použili:

1. z AG-nerovnosti máme, že levá strana je větší nebo rovna $\frac{3}{2}$, a lze dokazovat, že $\frac{3}{2}$ jsou větší nebo rovny než pravá strana (takhle mě celá ta nerovnost vlastně napadla, děkuji Edwardovi Youngovi za krásný důkaz druhé nerovnosti, který jsem neznal),
2. použití Muirheadovy nerovnosti (použil Zdeněk Pezlar),
3. učtvercování (použily sestry Fojtovy).

Autorské řešení je pomocí permutační nerovnosti. Nerovnost je symetrická, tj. BÚNO můžeme říct $a \geq b \geq c$. Potom $\frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ac} \geq \frac{1}{ab}$. Pak nám permutační nerovnost dá dva následující odhady:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab} \geq \frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ac}+\frac{a^2}{ab},$$
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab} \geq \frac{c^2}{bc}+\frac{a^2}{ac}+\frac{b^2}{ab}$$

No a nyní jednoduše sečteme, vydělíme dvěma, odečteme polovinu levé strany, dosadíme pomocí kosinové věty a jsme hotovi.