Řešení 5. série

Uspořádání

Úloha 5.1. Já, Krys a Myš jsme se dali do hledání kompasů. Některé jsme nacházeli vícekrát. Na konci jsme porovnali, kdo ví víc, přičemž A prý ví víc, než B, má-li A všechny kompasy, jako B, a ještě nějaké navíc. (Tedy např. když dva lidi mají úplně jiné kompasy, jsou v tomto směru neporovnatelní, tedy nemůžeme říct, kdo ví víc.) Přemýšlel jsem, jak můžou vypadat všechny situace, ve kterých vím víc než Krys a ve kterých žádní dva z nás nemají právě ty stejné kompasy.

Řešení. Označíme si Theodora, Myše a Kryse postupně T, M, K.

Ze zadání víme, že T ví víc, než K.

Taky si můžeme všimnout, že vztah vědět víc je tranzitivní (pokud A má všechny kompasy, které má B a B má všechny kompasy, co má C, tak zřejmě A má všechny kompasy, které má C).

Jelikož nás zajímají pouze vztahy o tom, kdo víc ví, tak stačí rozebrat všechny možnosti vztahů mezi T a M a mezi K a M.

Začneme vztahem mezi T a M a odvodíme možné vztahy mezi K a M:

1. T ví víc, než M: V tomto případě mohou nastat všechny 3 možnosti vztahu mezi K a M.
   (a) K ví víc, než M: Např. $T = \{a, b\}, K = \{a\}, M = \{\}$
   (b) K ví míň, než M: Např. $T = \{a, b\}, K = \{\}, M = \{a\}$
   (c) K ví neporovnatelně s M: Např. $T = \{a, b\}, K = \{a\}, M = \{b\}$
2. T ví míň, než M: Pak z tranzitivity plyne, že M ví víc, než K. Např. $T = \{a\}$, $K = \{\}, M = \{a, b\}$
3. T ví neporovnatelně s M: V tomto případě nemůže nastat situace, kdy K by věděl víc, než M, protože pak by T z tranzitivity věděl víc, než M. Ostatní dvě situace mohou nastat.
   (a) K ví míň, než M: Např. $T = \{a\}, K = \{\}, M = \{b\}$
   (b) K ví neporovnatelně s M: Např. $T = \{a, b\}, K = \{a\}, M = \{c\}$

Dostali jsme 6 možností, o kterých víme, že nastat mohou, a víme, že žádná jiná nastat nemůže – tedy těchto 6 možností je odpovědí na otázku.

Úloha 5.2. Představil jsem si S jako množinu všech čtverců nakreslených na zemi a řekl jsem si, že jejich rohy mají zajisté celočíselné souřadnice. Potom jsem se rozhodoval a dokazoval, zda pro každou dvojici čtverců a, b existuje jejich supremum vzhledem k $\subseteq$, tj. zda pro každé dva čtverce a, b existuje čtverec c takový, který obsahuje a i b a zároveň každý další čtverec, který obsahuje a i b, obsahuje i c (tedy čtverec c je jediný nejmenší obal čtverců a, b).

Řešení. Obecně pro libovolnou dvojici čtverců jejich supremum neexistuje. Dokažme to sporem. Nechť A a B jsou nepřekrývající se jednotkové čtverce o společné straně. Pro spor předpokládejme, že existuje čtverec S, který je jejich supremem. Zřejmě existují právě dva různé čtverce C, D o délce strany 2 takové, že obsahují čtverce A i B (uvědomte si, že rohy čtverců musí mít celočíselné souřadnice). Nazvěme P průnik těchto dvou čtverců. Supremum S musí jistě ležet v libovolném čtverci obsahující A i B, zejména tedy v C a v D, tedy i v jejich průniku P. Zároveň také toto supremum musí obsahovat sjednocení čtverců A a B, což je přímo P. S tedy leží v P a zároveň obsahuje P, tedy $S = P$. Jenže P je obdélník, tedy i S je obdélník, což je spor s předpokladem, že S je čtverec.

Úloha 5.3. Množina, ve které jsem se nacházel, měla n prvků. Dělalo se mi špatně z abstraktní neurčitosti kolem mě, tak jsem začal hledat podmnožiny, kterých bych se mohl zachytit. Musel jsem však nejdřív přijít na toto: Kolik nejvíc podmnožin můžu vybrat tak, aby žádné dvě mnou vybrané podmnožiny nebyly porovnatelné vzhledem k inkluzi? (Tedy pro žádné dvě podmnožiny nemůže nastat, že jedna je podmnožinou druhé nebo druhá první.)

Řešení. ==== 3. příklad ====

Ukážeme, že nejvíce můžeme vybrat $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ podmnožin původní množiny. Takovýto počet podmnožin původní množiny určitě existuje, stačí vzít všechny všechny různé podmnožiny o $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ prvcích, kterých je zřejmě $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ a žádná není podmnožina jiné (kdyby nějaká byla podmnožina jiné, tak to pro stejně velké konečné množiny znamená, že si jsou rovny).

Nyní uvažme S libovolný systém podmnožin původní množiny, jehož žádné dva prvky nejsou porovnatelné inkluzí. Ukážeme, že existuje systém podmnožin S', jehož všechny prvky budou mít velikost $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, a který bude mít alespoň tolik prvků jako S a pro který bude platit, že žádné dva prvky nejsou porovnatelné inkluzí.

Nechť tedy v S existuje množina mající méně než $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ prvků. Označme k velikost nejmenší množiny v S a m počet množin v S s touto velikostí. S' vytvoříme tak, že odebereme z S všech těchto m množin a za každou odebranou množinu M přidáme $(n-k)$ $(k+1)$-prvkových množin, které vzniknou tak, že k M přidáme každý z $n-k$ prvků, které neobsahuje.

Předpokládejme nejprve pro spor, že existují v S' takové množiny, z nichž jedna je podmnožinou jiné. Pokud by obě patřily i do S, tak dostáváme spor s tím, že v S žádné dvě nebyly porovnatelné. Žádná množina z $S' \setminus S$ určitě nemůže být nadmnožinou žádné jiné množiny z S', protože všechny ostatní množiny z S' mají méně prvků než ty v $S' \setminus S$. Nakonec si uvědomme, že každá množina v $S' \setminus S$ je nadmnožinou té k-prvkové množiny v S, ze které vznikla. Takže pokud by nastala poslední zbývající možnost a existovaly by množiny $A \in S, B \in S' \setminus S$ takové, že $B \subseteq A$, tak A je nadmnožina množiny, ze které B vznikla a dostáváme spor s tím, že v S žádné dvě množiny nebyly porovnatelné. Takže v S' nemohou být žádné dvě množiny porovnatelné.

Nyní ukažme, že $|S'| \geq |S|$. Z S jsme odebrali m množin a za každou z nich jsme do S' přidali $n-k$ množin. Každá z nich mohla vzniknout maximálně z $k+1$ různých množin, takže dostáváme, že $|S'| \geq |S| - m + m\frac{n-k}{k+1}$. Stačí nám tedy ukázat, že $\frac{n-k}{k+1} \geq 1$, což po úpravě je $n \geq 2k+1$, což určitě platí, jelikož $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Dohromady tedy máme, že $|S'| \geq |S| - m + m\frac{n-k}{k+1} \geq |S|$, takže jsme S touto úpravou opravdu zvětšili.

Když tento postup zopakujeme $\lceil \frac{n}{2} \rceil - k$ krát, tak dostaneme systém podmnožin původní množiny, z nichž žádné dvě nejsou porovnatelné a zároveň všechny mají velikost alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Pro dokončení důkazu stačí ukázat, že jsme schopni podobným způsobem nahradit všechny podmnožiny, které mají velikost větší než $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. To můžeme, jelikož $a \subseteq b \Leftrightarrow b' \subseteq a'$ (kde a' značí doplněk množiny a do množiny ze zadání). Tedy nahrazování množin větších než $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ menšími množinami lze redukovat na problém nahrazování jejich doplňků většími množinami, což je problém, pro který známe řešení.

Úloha 5.4. Ulevilo se mi, když jsem zjistil, že jsem součástí množiny přirozených čísel. Rozhodl jsem se uspořádat ji (čili nalézt uspořádání, viz pomocný text) tak, aby existovalo nekonečně mnoho čísel, které nejsou minimální (je ještě nějaký prvek před nimi), ale zároveň nemají bezprostředního předchůdce. Bezprostřední předchůdce prvku A je prvek B, který je „hned“ před prvkem A, tzn. neexistuje žádný další prvek C (mimo A a B), který by byl v uspořádání před A a zároveň za B. Formálně zapsáno:

$$B \text{ je b.p. } A \Leftrightarrow B \sqsubseteq A \wedge \nexists X (B \sqsubset X \wedge X \sqsubset A).$$

(Bonus za pátý bod, bez této části můžete dostat maximálně čtyři) Našel jsem takové uspořádání, které splňovalo předcházející a navíc bylo lineární (čili každé dva prvky spolu lze porovnat) a každý prvek měl bezprostředního následníka (bezprostřední následník je definován podobně jako předchůdce).

Řešení. Nejdříve nalezněme hledané uspořádání na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Toto uspořádání značmě $\preceq$ a definujme takto:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d).$$

Nejdříve ukažme, že $\preceq$ je uspořádání. Zřejmě $\preceq$ je reflexivní protože pro každé (a, b) platí $a = a$ a zároveň $b \leq b$. Dále ukažme, že $\preceq$ je antisymetrické. Předpokládejme, že pro nějaké $(a, b), (c, d)$ platí $(a, b) \preceq (c, d)$ a $(c, d) \preceq (a, b)$. Pak ale nutně platí $a = c$, protože $\leq$ je uspořádání, a ze stejného důvodu i následně $b = d$. Konečně ukažme, že $\preceq$ je také transitivní. Nechť tedy $(a, b) \preceq (c, d)$ a $(c, d) \preceq (e, f)$. Pokud $a < c$ nebo $c < e$, pak také $a < e$, a proto $(a, b) \preceq (e, f)$. V opačném případě nutně platí $a = c = e$. Proto také platí $b \leq d \leq f$ a z tranzitivity relace $\leq$ vyplývá $b \leq f$. Proto i v tomto případě platí $(a, b) \preceq (e, f)$ a $\preceq$ je relací uspořádání.

Z definice je zřejmé, že jsou každé dva prvky porovnatelné, a proto je uspořádání řetězcem. Tedy obsahuje nejvýše jeden minimální prvek. Stačí už pouze ukázat, že obsahuje nekonečně mnoho prvků, které nemají bezprostředního předchůdce a zároveň mají bezprostředního následníka.

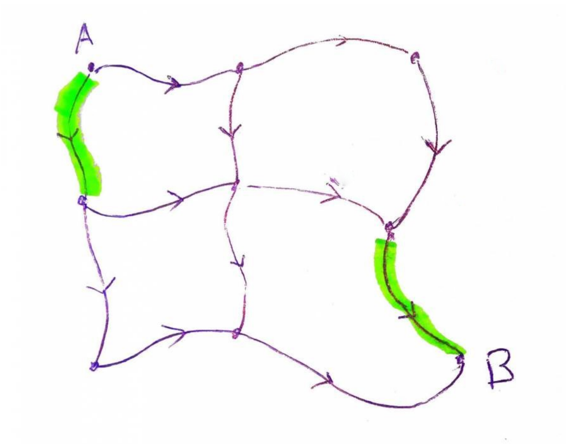
Uvažujme pro každé $a \in \mathbb{N}^+$ dvojici $(a, 1)$. Pro spor předpokládejme, že má $(a, 1)$ přímého předchůdce. Zvolme tedy $(b, c) \preceq (a, 1)$ a zároveň si dvojice nejsou rovny. Nejdříve předpokládejme, že $b = a$. Pak ovšem $c < 1$, což je spor, protože c je přirozené. Nutně tedy $b < a$, a proto například $(b, c + 1)$ je prvek větší než (b, c) a menší než $(a, 1)$. Pro každé $(a, 1)$ také existuje přímí následník $(a, 2)$. Předpokládejme pro spor, že existuje dvojice (b, c) taková, že $(a, 1) \preceq (b, c) \preceq (a, 2)$. Pak nutně $b = a$ a $c \in [1, 2]$. Protože je ovšem c přirozené číslo, musí se rovnat buď 1 nebo 2, tedy platí $(b, c) = (a, 1)$ nebo $(b, x \preceq yc) = (a, 2)$. Proto je $(a, 2)$ přímý následník $(a, 1)$.

Našli jsme tedy relaci na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, která splňuje požadavky ze zadání. Poslední podmínkou je, že hledáme relaci na $\mathbb{N}$. K tomu stačí najít libovolnou bijekci f mezi $\mathbb{N} a \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a výslednou hledanou relaci definovat takto:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x \preceq y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y)$$

Pro završení důkazu stačí najít bijekci f. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje největší mocnina čísla 2, která dělí n. Proto každé číslo $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně napsat ve tvaru $2^a \cdot b$, kde b není dělitelné 2. Zároveň pro každou dvojici a, b existuje právě jedno číslo $2^a \cdot (2b-1)$. Proto definujeme–li f tak, že $f(2^a \cdot (2b-1)) = (a, b)$, jedná se skutečně o bijekci, a proto existuje i uspořádání na $\mathbb{N}$ splňující požadavky ze zadání. To jsme chtěli dokázat.

Úloha 5.A. Nacházel jsem se teď na mapě neznámého města. Síť křižovatek a jednosměrek vypadala jako na tomto obrázku:



Právě dvě z jednosměrek (ty vyznačené v obrázku) byly slavnostně vydlážděné. Každá jednosměrka měla nějakou neznámou délku. Zjistil jsem však, že pokud budu chtít jet z A do B a nikdy nepojedu v protisměru, tak když pojedu libovolnou cestou, která začíná vydlážděnou jednosměrkou, ujedu stejnou vzdálenost, jako když pojedu cestou, která končí vydlážděnou jednosměrkou. Nevěděl jsem, kudy se dát, ale zkusil jsem dokázat, že jsou všechny cesty z A do B stejně dlouhé.

Řešení. Úvodní pozorování: Z A do B vede přesně 6 cest a jen jediná z nich (doprava - dolů - dolů - doprava) je taková, že nezačíná ani nekončí vydlážděnou jednosměrkou (říkejme jí cesta γ). Všechny ostatní jsou však stejně dlouhé, neboť jsou stejně dlouhé jako cesta (dolů - doprava - doprava - dolů), která začíná i končí vydlážděnou jednosměrkou. Stačí tedy srovnat cestu γ s libovolnou jinou cestou.

Nechť $a, b, \ldots, h$ jsou délky jednotlivých (stejnojmenných) úseků cest jako na obrázku a zaveďme si značení cest pomocí úseků, kterými jsou tvořeny (např. $\gamma = bdfh$). Z úvodního pozorování plyne, že cesty $acfh$ a $aceg$ jsou stejně dlouhé, a protože ac je jejich společná část, pak nutně $e + g = f + h$. Podobná úvaha o cestách $aceg$ a $bdeg$ nám dává rovnost $a + c = b + d$. Odtud dostáváme kýženou rovnost délek cest $aceg$ a γ.

Úloha 5.B. „Vidíš před sebou trojúhelník ABC?“

„Ano.“

„ Na straně a jsou dány body A_1, A_2, na straně b body $B1$, $B2$ a na straně c body C_1, C_2 tak, že dva body na jedné straně jsou vždy stejně vzdálené od jejího středu.“

„Ano, vidím.“

„Čtyřúhelníky $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, $A_1A_2C_1C_2$ jsou tětivové (lze jim opsat kružnice), je to tak?“

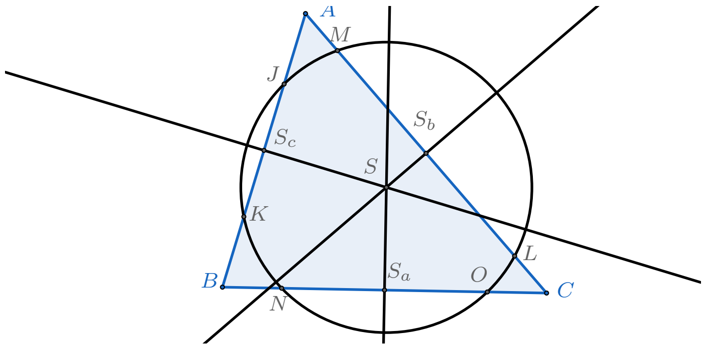
„Ano.“

„Dokaž, že všech šest bodů leží na jedné kružnici.“

Řešení. Dokážeme, že všechny body jsou stejně daleko od středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC (čili že všechny tři středy čtyřúhelníků splývají, navíc i s S). Zřejmě stačí ukázat, že s S splývá alespoň jeden střed čtyřúhelníků ze zadání. Bez újmy na obecnosti vyberme libovolný z těchto čtyřúhelníků a nazvěme ho $JKLM$.

Body J, K, M, L leží na jedné kružnici, což znamená, že jsou stejně daleko od nějakého bodu, označme jej T. Ten určitě leží na ose o_{JK}, neboť ta osa je právě množina bodů, které jsou stejně daleko od J jako od K. Stejně tak bod T musí ležet na ose o_{LM}.

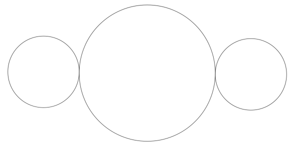
Nyní dokažme, že tyto osy jsou navíc osy stran trojúhelníku. Body J, K jsou stejně daleko od středu S_c. Proto tento střed leží na ose o_{JK}. Tato osa je pak kolmá na JK, čili i na stranu c. Je to tedy kolmice na úsečku, která navíc prochází jejím středem, což přesně určuje osu $o_{JK} = o_c$. Analogicky se ukáže, že $o_{LM} = o_b$. Potom ale průsečík $T = o_{JK} \cap o_{LM}$ splývá s $o_c \cap o_b = S$ a tedy $S = T$.



Úloha 5.C. S Hadem jsme hráli poslední hru. Postupně jsme se střídali v kreslení kruhů do písku. Nový kruh se vždy musel dotýkat vnějším dotykem alespoň jednoho stávajícího kruhu, nejvýše však tří, a žádné dva kruhy nesměly sdílet nějakou oblast s nenulovým obsahem. Vítězí ten, jehož kruh způsobí, že všechny kruhy mají celkem devět průsečíků. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Had? Jaká je to strategie?

Řešení. Vyhrává Had. Ve vysvětlování strategie mějme na paměti, že já mohu táhnout jakkoli a přesto had dokáže táhnout tak, že vyhraje.

1. První tah je vynucený. Respektive nezáleží na umístění ani velikosti.
2. Já si pak mohu jen vybrat, jak velkou kružnici přiložím. Po mém tahu je pak jistě jeden průsečík.
3. Had pak zvolí další kružnici, která bude stejně velká, jako menší ze dvou původních a bude se dotýkat té větší přesně naproti od zbylé, viz obrázek. Tím se zajistí, že po tomto tahu nelze položit kružnici, která by měla více jak dva dotyky. Po tomto tahu jsou průsečíky dva.



4. Protože libovolná přidaná kružnice se může dotýkat nejvýše dvou ze tří kružnic, mohu přidat jen jeden či dva průsečíky. Po mém tahu jich proto bude 3 nebo 4.
5. Had potom dorovná do 5 přidáním jednoho neb dvou, což může vždy. Je jich tak 5.
6. Zřejmě se přidaná kružnice opět nemůže dotýkat všech kružnic, proto ve svém tahu mohu přidat pouze 1, 2 nebo 3 průsečíky. Dohromady jich po mém tahu může být 6,7 nebo 8.
7. Had pak přidá 1, 2 nebo 3 průsečíky tak, aby jich pak bylo 9 a vyhrál.

Pozn.: tři přidat může, neboť ve čtvrtém nebo pátém tahu byla položena kružnice se dvěma průsečíky a had tedy může kružnici vložit "dovnitř".

Úloha 5.D. „Nechť p je prvočíslo. Ukaž mi, že rovnice $x^p - y^p = p$ nemá celočíselná řešení x, y.“

Řešení. Mějme prvočíslo p. Máme dokázat, že rovnice

$$x^p - y^p = p$$

nemá celočíselné řešení. Úlohu budeme řešit sporem, tj. předpokládáme, že nějaké takové řešení (x, y) existuje. Nejprve ukažme, že pro p liché nutně $x, y > 0$ (pro $p = 2$ to můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat). K tomu využijeme platnosti tvrzení $2^n > n$ pro všechna přirozená n (toto tvrzení lze snadno dokázat např. indukcí.) Předpokládejme $x \geq 0, y \leq 0$. Pokud je alespoň jedno z čísel $|x|, |y|$ větší než 1, máme $x^p - y^p \geq 2^p + 1 > p$. zjevně $x > 2$. Pokud $|x|, |y| \in \{0, 1\}$, jistě rovnost $x^p - y^p = p$ nastat nemůže. Obdobně bychom postupovali v případě $x < 0, y > 0$.

Předpokládejme tedy $x, y > 0$. Využijeme Malé Fermatovy věty. Podle ní platí, že

$$\begin{aligned} x^p &\equiv x \pmod{p}, \\ y^p &\equiv y \pmod{p}. \end{aligned}$$

Pak tedy

$$0 \equiv p = x^p - y^p \equiv x - y \pmod{p},$$

tj. $p | x - y$.

Uvažme rozklad levé strany naší rovnice:

$$x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots y^{p-1}) = p$$

Tudíž $(x - y)|p$ a jelikož máme $p|x - y$, celkem dostaneme $x - y = \pm p$. Tedy $\pm 1 = x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots y^{p-1} \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = p$, což je spor. Tím je důkaz hotov.