Řešení 4. série

KOMBINATORIKA

ÚLOHA 4.1. Na šachovnici 8×8 se v protějších rozích nacházeli černý a bílý kůň. Střídali se v tazích, přičemž černý kůň začínal. Pohybovali se jako klasičtí šachoví koně. Napadlo mě: Může někdy černý kůň skočit na políčko, na kterém se nachází bílý kůň?

ŘEŠENÍ. Budeme chtít dokázat, že černý kůň nemůže skočit na stejné políčko, na kterém se nachází bílý kůň, protože by barvy pole pod oběma koňmi musely být stejné po tahu černého koně, což není možné.

Označme si B_i, (resp. C_i), $i \in \mathbb{N}_0$ barvu pole, na kterém se nachází bílý (resp. černý) kůň po i krocích.

Musíme uvědomit, že kůň při každém pohybu mění barvu pole, na kterém stojí. Neboli platí

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad B_i \neq B_{i+1} \land C_i \neq C_{i+1} \tag{1}$$

Z 1 a z toho, že na šachovnici jsou pouze 2 různé barvy plyne

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad B_i = B_{i+2} \land C_i = C_{i+2} \tag{2}$$

Zároveň platí, že protější rohy šachovnice mají stejnou barvu, tedy platí

$$B_0 = C_0 \tag{3}$$

Z 1 pro $i = 0$, z 3 a z toho, že na šachovnici jsou pouze 2 různé barvy plyne, že platí

$$B_1 = C_1 \tag{4}$$

Konečně z 2, 3 a 4 vyplývá

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad B_i = C_i \tag{5}$$

Pokud by černý někdy doskočil na políčko, na kterém se nachází bílý kůň, znamenalo by to, že (jelikož černý začínal, tedy po svém tahu bude mít o 1 tah více, než bílý)

$$\exists i \in \mathbb{N} : \quad C_{i+1} = B_i, \tag{6}$$

což je ovšem v rozporu s 5 a 1, tedy černý nikdy nedoskočí na políčko, na kterém se nachází bílý kůň.

ÚLOHA 4.2. Do dřevěné podlahy se vypálila kružnice o poloměru 2019. Na parketu se následně objevilo 2019 tanečníků, z nichž každý se pohyboval v kruhu, který ležel ve vnitřní oblasti vypálené kružnice. Každé dva kruhy měly nejvýše jeden společný bod, a kromě tohoto bodu měly prázdný průnik. Hned jsem si všiml, že součet poloměrů tří nejmenších kruhů je vždy menší než 135. Přemýšlel jsem však, jak to dokázat.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že nejmenší tři kruhy mají součet poloměrů větší než 145. Podle dirichletova principu pak platí, že největší z těchto tří kruhů má poloměr aspoň 45. Protože se ovšem jedná o tři nejmenší kruhy, znamená to, že zbylých 2016 kruhů má poloměr také větší než 45. Dokázali jsme tedy, že aspoň 2017 kruhů má poloměr aspoň 45 a tedy součet jejich obsahů je $45^2 \cdot 2017\pi$. Obsah celého velkého kruhu je $2019^2\pi$.

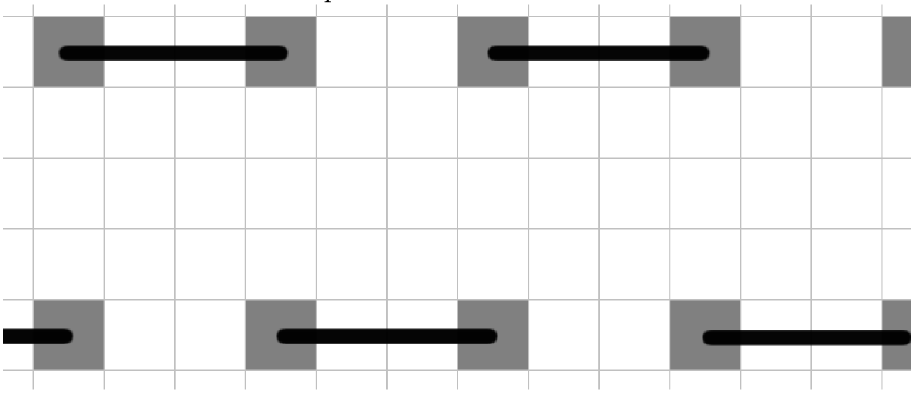
$$\pi 45^2 \cdot 2017 = 4084425\pi \geq 4076361\pi = 2019^2\pi$$

Tedy porovnáním zjišťujeme, že součet obsahů malých kruhů bude vždy větší než obsah velkého kruhu, což je spor. Proto musí existovat trojice kruhů, pro kterou je součet jejich poloměrů nejvýše 145.

Úloha 4.3. Principál rozložil na stůj nekonečný čtverečkovaný papír. Já jsem měl zapisovat křížky, on kolečka. Ve svých tazích jsme se pravidelně střídali přičemž jsem začínal já. Principál mi vysvětlil, že vyhraji právě tehdy, pokud se na papíře bude nacházet obdélník o rozměrech 4×5, v jehož rozích se budou nacházet křížky (x-ová souřadnice rohů obdélníku se tedy musí lišit o 3 a y-ová o 4). Po chvíli hraní se mi však něco nezdálo. Zkusil jsem dokázat, že má Principál takovou strategii, že bez ohledu na to, jak hraji já, mě nikdy nenechá vyhrát.

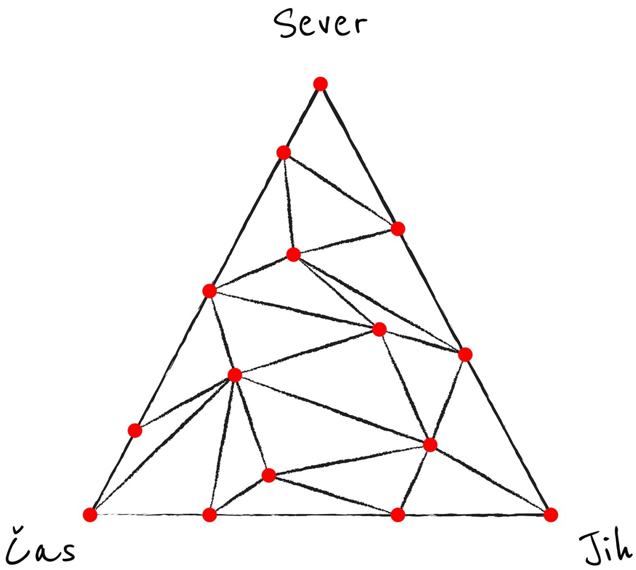
Řešení. Zafixujme někde počátek. Políčka očíslujme dvěma čísly X a Y, podle toho, o kolik polí vodorovně a svisle se musíme posunout z počátku, abychom se do nich dostali. Hrací plochu lze pomyslně rozdělit na více hracích plánků, kde ve stejném hracím plánku budou políčka se stejným zbytkem čísla X po dělení 3 a stejným zbytkem Y po dělení 4, tedy na 12 pomyslně různých herních plánků.

Stačí nám ukázat, jak Principál Teodorovi zabrání ve výhře na každém z těchto herních plánků. Políčka v rámci jednoho plánku lze spojit do dvojic, viz obrázek. Obdélník s křížky v rohu by musel obsahovat jednu celou dvojici políček zaplněnou křížky. Principál zabrání Teodorovi ve výhře tím, že po jeho tahu obsadí políčko, které je ve dvojici s tím, které Teodor právě obsadil. Je-li takové políčko již obsazené kolečkem, dá Principál kolečko kamkoli. Proto dokáže Principál Teodorovi zabránit ať už začíná kdokoli.



Úloha 4.4. „Svět, kde se teď nacházíš, je trojúhelníkový, má tedy jen tři světové strany: Sever, Jih a Čas. Politicky je tento svět rozdělen na severní, jižní a časové mocnosti. Cirkus leží na jednom z Trianglových ostrovů, které jsou rozděleny do trojúhelníkových provincií a v každém vrcholu provincie se nachází město. Jeden z ostrovů vypadá například takto..“ Principál nakreslil na papír obrázek. „Každé město ovládá jedna ze tří mocností. V nejsevernějším městě každého z ostrovů sídlí Severní mocnost, v nejjižnějším městě Jižní

mocnost a v nejčasovějším městě Časová mocnost. V městech severojižního pobřeží sídlí sever nebo jih. Obdobně to platí pro severočas a jihočas. O vnitrozemských městech nic nevíš. Dokaž mi, Teodore, že na každém ostrově existuje provincie v jejíž vrcholech leží města všech tří mocností."



Řešení. Pro spor předpokládejme, že na celém ostrově není žádná provincie s každým městem jiným. Spočítejme počet hran, jejichž koncové body patří jiným mocnostem, přičemž každou spočítáme tolikrát, kolika trojúhelníků je součástí (tzn. okrajové hrany jen jednou, vnitřní dvakrát). Těmto hranám říkejme „speciální".

1. Každý trojúhelník má buď všechna města stejná, pak neobsahuje žádnou speciální hranu, nebo má jedno město různé od zbylých dvou, pak obsahuje dvě speciální hrany. Každopádně je počet speciálních hran určitě **sudý**.

2. Sečteme hrany uvnitř ostrovu a na okraji. Počet hran uvnitř je jistě sudý, neboť je každá hrana uvnitř součástí dvou trojúhelníků. Počet hran na okraji je naopak lichý. To z toho důvodu, že když projdeme jednu stranu mezi dvěma okrajovými městy, mocnost je na začátku cesty jiná než na konci, přičemž každé město na cestě patří pouze jedné za dvou mocností. Takovýchto „přechodů" z jedné mocnosti na druhou tedy musí být opravdu lichý počet. Nakonec, počet speciálních hran je roven součtu sudého čísla (vnitřní hrany) a tří lichých (na každé straně jedno), což je **liché**.

Spor.

Úloha 4.A. Uprostřed stolu byla nekonečně hluboká díra o rozměrech 10×20 centimetrů. Na jejím okraji se nacházel plot. K lampě umístěné uprostřed kratší strany díry byl přivázán hlídací pes na řetězu dlouhém 30 centimetrů. Přemýšlel jsem: Jak velká je plocha území, které může pes hlídat (kam až mu dovolí řetěz), aniž by spadl do díry?

Řešení. Protože se bude řetěz na rozích plotu ohýbat, dostaneme jeden půlkruh o poloměru 30 cm, dva čtvrtkruhy o poloměru 25 cm a dva čtvrtkruhy o poloměru 5 cm, které se už nebudou překrývat. Obsah plochy tedy bude $\frac{\pi \cdot 30^2}{2} + \frac{\pi \cdot 25^2}{2} + \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 775\pi cm^2$.

BRKOS Team 2018

Úloha 4.B. Kobereček na stole teď nabíral všechny možné rozměry. Všiml jsem si, že jeho strany jsou však vždy taková přirozená čísla a a b, že $\frac{a}{b}$ je zlomek v základním tvaru. Svíraje v ruce revolver jsem zkusil najít všechna reálná c taková, že na koberečku o stranách a a b tvořila kostkovaný vzor s kostkami o straně c (tedy koberec šel vydláždit čtverci o straně c). Nesmím zapomenout dokázat, že jsou skutečně všechna, pomyslel jsem si.

Řešení. Lze-li obdélník o stranách a, b vydláždit čtverci o straně c, znamená to $a = dc, b = ec$ pro nějaká přirozená čísla d, e. Tedy $\frac{a}{b} = \frac{cd}{ce} = \frac{d}{e}$. Jelikož $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru, znamená to $a|d, b|e$; přesněji $d = ax, e = bx$ pro nějaké přirozené x. Celkem tedy $a = dc = axc$ neboli $cx = 1$. Tedy každé řešení musí být tvaru $c = \frac{1}{x}$ pro nějaké přirozené x. Navíc pro libovolné takové x lze obdélník o rozměrech a, b lze vskutku vydláždit abx^2 čtverci o straně délky $\frac{1}{x}$. Celkem tedy

$$c \in \left\{\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{N}\right\}.$$

Úloha 4.C. Vybavila se mi soustava, na které jsem byl několik dnů zaseknutý. Možná právě v ní jsem udělal chybu. V hlavě jsem ji vyřešil pro $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x(x^2 - y^2 - 3) + xz - yz &= 2 \\ y(x^2 - y^2 - 3) - xz + yz &= 2 \\ (x - y)(x^2 - y^2 - 3) + 6(x - y) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení. Sečtením prvních dvou rovnic a úpravou třetí dostáváme:

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - y^2 - 3) &= 4, \qquad (7) \\ (x - y)(x^2 - y^2 + 3) &= -2. \end{aligned}$$

Jelikož pravé strany obou rovnic jsou nenulové, tak musí výt nenulové i levé strany a rovnice můžeme vynásobit, dostaneme:

$$(x^2 - y^2)\left((x^2 - y^2)^2 - 9\right) = -8.$$

Vidíme, že se nám v rovnici mnohokrát vyskytuje člen $(x^2 - y^2)$, zavedeme proto substituci: $t = x^2 - y^2$. Dostaneme:

$$t^3 - 9t + 8 = 0.$$

Jedná se sice o kubickou rovnici, která se obecně řeší velice špatně, ale v tomto konkrétním případě můžeme uhádnout kořen $t_1 = 1$ a vytknout z levé strany člen $(t - 1)$, z čehož dostaneme $(t-1)(t^2+t-8) = 0$. Dopočítáme, ža poslední dva kořeny jsou $t_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}, t_3 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

Vyjádřeme nyní ostatní neznámé v závislosti na t. Z poslední rovnice máme:

$$x - y = \frac{-2}{t + 3}$$

a z (7) dostáváme:

$$x + y = \frac{4}{t - 3}.$$

Sečtením a odečtením těchto dvou vztahů dostaneme:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{t+3} + \frac{4}{t-3}\right) = \frac{t+9}{t^2-9},$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t-3} - \frac{-2}{t+3}\right) = \frac{3t+3}{t^2-9}.$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit $z = \frac{3-t}{2}$. Dosažením všech možných hodnot t dostáváme $(x, y, z) \in \left\{\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, 1\right), \left(-\frac{1+\sqrt{33}}{2}, -3, \frac{7-\sqrt{33}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{33}-1}{2}, -3, \frac{7+\sqrt{33}}{4}\right)\right\}$.

Správnost řešení ověříme zkouškou. Řešení bylo více, ale toto jsem vybral, protože mi přišlo poučné zasubstituovat složitý výraz, který se v soustavě často opakuje.

Úloha 4.D. „Ukaž mi, že každé přirozené číslo lze zapsat jako rozdíl dvou přirozených čísel, které v rozkladu na prvočinitele mají stejný počet různých prvočísel."

Řešení. Tvrzení je lehké dokázat pro sudá čísla: Nechť n je sudé, pak $n = 2n - n$. Protože je n sudé, $2n$ má přesně stejné prvočíselné dělitele jako n.

Nechť tedy n je liché. Označme p nejmenší liché prvočíslo nedělící n a zapišme n jako $n = pn - (p-1)n$. Nyní stačí ověřit, že pn a $(p-1)n$ mají stejný počet různých prvočísel v rozkladu. Protože z předpokladu p nedělí n, pn má o jedna více různých prvočísel v rozkladu než n. Dále vidíme, že $p-1$ je sudé, a tedy do rozkladu $(p-1)n$ přibyla dvojka. Zdůvodníme, proč nic jiného už nepřibylo: Uvážíme lichá prvočísla z rozkladu čísla $p-1$. Všechna jsou jistě menší než p, a proto z předpokladu musela dělit už samotné n, tedy do rozkladu $(p-1)n$ nepřibyla (už tam byla).