Řešení 3. série

Důkazy

Úloha 3.1. Mám k dispozici $n/(n+1)$ a $(n+1)/(n+2), n \in \mathbb{N}$. A taky nůž na krku. Pomocí konečného počtu sčítání a odčítání potřebuji dostat jedničku.

Řešení. Jedničku získáme, pokud od čísla získaného sečtením n a dvou zlomků $\frac{n+1}{n+2}$ odečteme n a jeden zlomek $\frac{n}{n+1}$. Celkem dostaneme:

$$\overbrace{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+1}{n+2}+\cdots+\frac{n+1}{n+2}}^{n+2 \text{ krát}}-\overbrace{\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+1}-\ldots-\frac{n}{n+1}}^{n+1 \text{ krát}}=$$

$$=(n+2)\frac{n+1}{n+2}-(n+1)\frac{n}{n+1}=(n+1)-n=1$$

Úloha 3.2. Křížovka, kterou po mně Donatella hodila, byla matematická. Poslední chybějící pojem je „nejmenší kladné celé číslo n takové, že $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená".

Řešení. Na to, aby n-tá odmocnina bola prirodzené číslo, musí byť číslo pod odmocninou n-tou mocninou. Takže hľadané číslo n musí spĺňať nasledujúce rovnosti pre nejaké prirodzené x, y, z:

$$2n = x^2 \tag{1}$$
$$3n = y^3 \tag{2}$$
$$5n = z^5 \tag{3}$$

Z (1) plynie, že 2 delí x^2, preto nutne 2 delí x a teda 4 delí x^2. Takže 2 delí n a n je tvaru $2k^2$ pre nejaké prirodzené k. To znamená, že každé prvočíslo má vo faktorizácii čísla n párny exponent, okrem čísla 2, ktoré má exponent nepárny.

Analogicky, z (2) plynie 3^3 delí y^3 a teda 3^2 delí n. Preto n je v tvare 3^2l^3 pre nejaké prirodzené l. To znamená, že každé prvočíslo okrem 3 má vo faktorizácii n exponent deliteľný číslom 3. Exponent prvočísla 3 má po delení 3 zvyšok 2.

Nakoniec, z (3) plynie, že 5^5 delí z^5 a preto 5^4 delí n. Z čoho plynie, že n je v tvare 5^4m^5 pre nejaké prirodzené m. Takže všetky prvočísla okrem 5 majú exponent vo faktorizácii n deliteľný číslom 5. Exponent prvočísla 5 má po delení 5 zvyšok 4.

Keď dáme tieto informácie dokopy, tak zistíme, že na to, aby n bolo čo najmenšie, tak musí byť v tvare $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, kde platí:

- α je najmenšie nepárne prirodzené číslo deliteľné 3 a 5. Preto $\alpha = 15$.
- β je najmenšie párne prirodzené číslo deliteľné 5 a po delení 3 so zvyškom 2. Preto $\beta = 20$.

- γ je najmenšie párne prirodzené číslo deliteľné 3 a po delení 5 so zvyškom 4. Preto $\gamma = 24$.

Takže najmenšie prirodzené číslo vyhovujúce podmienkam je $n = 2^{15}3^{20}5^{24}$.

Úloha 3.3. „Nechť m, n jsou nesoudělná celá čísla, n je různé od nuly, $k \in \mathbb{Z}$. Označme

$$A_k = \{a + b\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$
$$M = \{a + b\sqrt{\frac{m}{n}} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukaž, že pro vhodné k platí $M = A_k$," vyštěkla akrobatka zlomyslně.

Řešení. Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Nechť $a, b \in \mathbb{Q}$. Pak platí

$$a + b\sqrt{\frac{m}{n}} = a + b\sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{n}} = a + b\sqrt{\frac{mn}{n^2}} = a + b\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n^2}} = a + \frac{b}{|n|}\sqrt{mn},$$

přičemž zřejmě $\frac{b}{|n|} \in \mathbb{Q}$.

Budeme se snažit ukázat, že pro $k = m \cdot n$ platí $M = A_k$.

Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$. Nechť $k = mn$.

$M \subseteq A_k$: Nechť $z \in M$ libovolný. Pak $\exists a, b \in \mathbb{Q} : z = a + b\sqrt{\frac{m}{n}}$.

$$z = a + b\sqrt{\frac{m}{n}} = a + \frac{b}{|n|}\sqrt{mn} \in A_k \left(\text{zřejmě } \frac{b}{|n|} \in \mathbb{Q}\right).$$

$\Rightarrow M \subseteq A_k$.

$A_k \subseteq M$: Nechť $z \in A_k$ libovolný. Pak $\exists a, b \in \mathbb{Q} : z = a + b\sqrt{k}$.

$$z = a + b\sqrt{k} = a + b\sqrt{mn} = a + b\sqrt{mn \cdot \frac{n}{n}} = a + b\sqrt{\frac{mn^2}{n}} =$$
$$= a + b\sqrt{n^2}\sqrt{\frac{m}{n}} = a + b|n|\sqrt{\frac{m}{n}} \in M \,(\text{zřejmě } b|n| \in \mathbb{Q}).$$

$\Rightarrow A_k \subseteq M$.

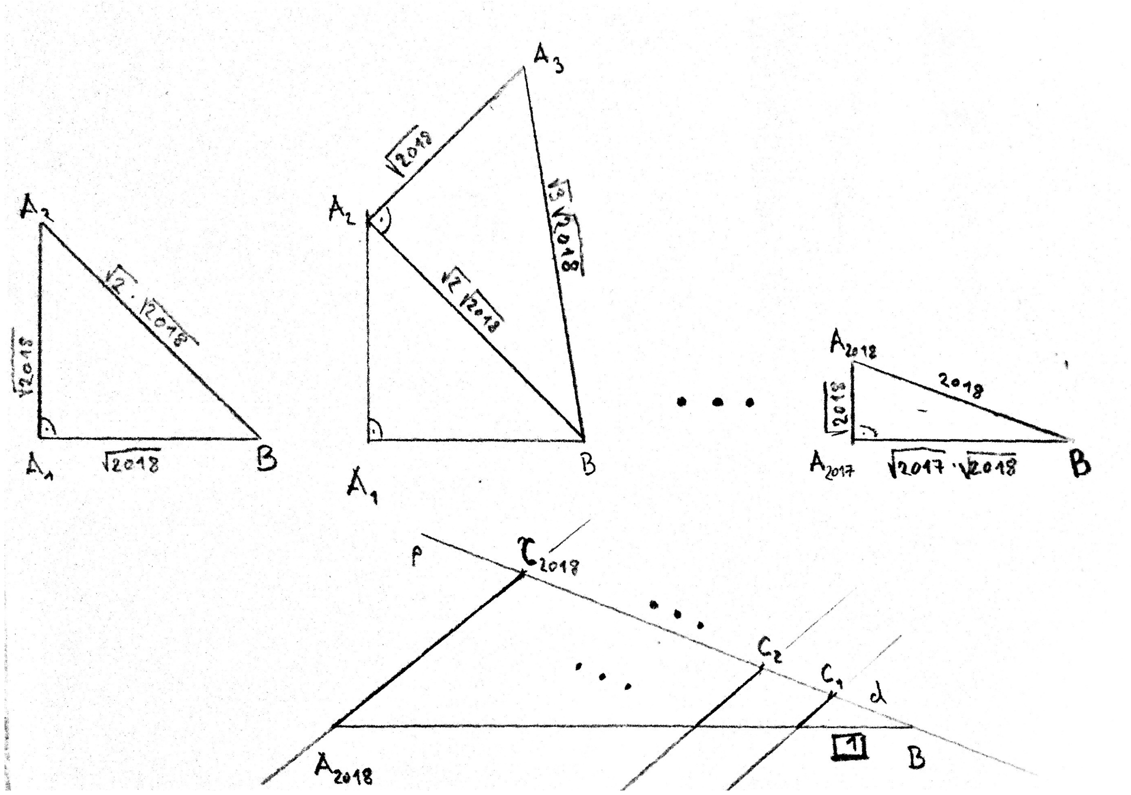
Jelikož platí $M \subseteq A_k$ i $A_k \subseteq M$, platí $M = A_k$ pro $k = mn$.

Úloha 3.4. Krys a Myš mi konečně sdělili, že mají k dispozici pravítko, kružítko a úsečku dlouhou $\sqrt{2018}$. Pomocí nich prý můžou sestrojit kouzelnou úsečku dlouhou 1. Ale jak?

Řešení. Řešení rozdělíme do dvou kroků – v prvním ukážeme, jak ze zadané vzdálenosti $\sqrt{2018}$ lze pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat vzdálenost 2018 a v druhém kroku ukážeme, jak rozdělit úsečku na daný počet stejně dlouhých částí a z vyrobit tak 1.

1. Zvolme bod A_1 a bod B tak, že $|A_1B| = \sqrt{2018}$. Nyní zkonstruujme kolmici k_2 na A_1B procházející bodem A_1 a na ní bod A_2 tak, že $|A_1A_2| = \sqrt{2018}$. Protože body A_1A_2B tvoří pravoúhlý trojúhelník, z Pythagorovy věty potom $|A_2B| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2018}$. Podobně zkonstruujme bod A_3 ležící na komici k_3 na A_2B procházející bodem A_2 tak, že $|A_2A_3| = \sqrt{2018}$. Opět z Pythagorovy věty dostáváme $|A_3B| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2018}$. Stejným způsobem postupně konstruujeme body A_i, přičemž $|A_iB| = \sqrt{i} \cdot \sqrt{2018}$. Snadno nyní pro $i = 2018$ dostáváme $|A_{2018}B| = 2018$.

2. Uvažme nyní přímku p vedenou bodem B tak, že $A_{2018} \notin p$ a libovolnou vzdálenost d. Sestrojme bod C_1 na p tak, že $|BC_1| = d$ a dále body C_i na polopřímce BC_1 tak, že $|BC_i| = i \cdot d$. Rovnoběžky k přímce $A_{2018}C_{2018}$ vedené body C_i, $i < 2018$ nyní rozsekají úsečku $|A_{2018}B|$ na 2018 částí o stejných délkách – délkách 1.

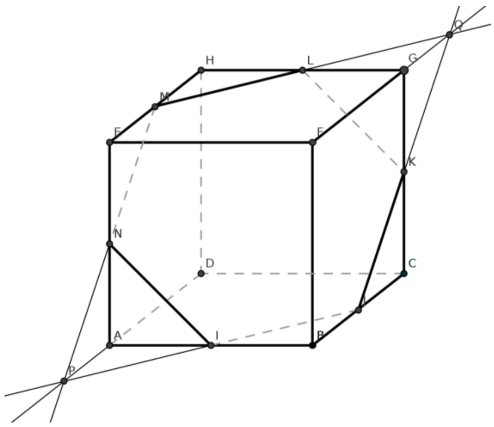


Závěrem důkazu je třeba zdůraznit, že všechny „subkonstrukce“ jako kolmice či rovnoběžky vedené daným bodem lze jednoduše realizovat pouze pomocí kružítka a pravítka, což zde nebudeme ukazovat. Při řešení jsme mohli celočíselné strany dosáhnout i konstrukcí pravoúhlého trojúhelníku o stranách 13, 43 a $\sqrt{2018}$ a dále šlo občas v některé části elegantně použít Euklidovu větu o odvěsně.

Úloha 3.A. Krys a Myš vytáhli z kapsy krychli sýra. Sdělili mi, že ji potřebují rozdělit jedním řezem na dva díly. Jejich požadavek však nebyl, aby byly stejné, nýbrž aby byl řezem šestiúhelník.

Řešení. Krychli pojmenujeme standardně $ABCDEFGH$, tedy tak, že E leží nad A. Označme si jako I, J, K, L, M, N po řadě středy hran AB, BC, CG, GH, HE, EA, viz obrázek, a dokažme, že všechny skutečně leží v jedné rovině. Body $IJLM$ zřejmě leží v rovině dané dvojicí rovnoběžných přímek IJ a LM, zbývá vyšetřit body K a N.

Přímka IJ leží v rovině ABC, kde také leží přímka DA. Protínají se v bodě, který nazveme P a z věty *usu* je vzdálený od bodu A o půlku hrany krychle. Podobnou úvahou se však v bodě P musí také protnout přímky MN a DA, proto P leží v rovině IJM, a tedy i N leží v rovině IJM. Bod K vyřešíme analogicky.



Úloha 3.B. Automat na jména fungoval následovně: Vypadne z něho jméno pokaždé, když se do něj zadá prvočíslo p, pro které je $18p + 1$ třetí mocnina nějakého přirozeného čísla. Potřeboval jsem najít všechna taková prvočísla.

Řešení. Ze zadání máme najít všechna taková provočísla p, pro která existuje přirozené číslo $a \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$18p + 1 = a^3$$

Protože levá strana dává zbytek 1 po dělení 6, musí dávat také pravá strana stejný zbytek. Rozeberme, v jakém tvaru může být číslo a, aby a^3 dávalo zbytek 1 po dělení 6:

$$a = 6k \Rightarrow a^3 = 6 \cdot 36k^3$$

$$a = 6k + 1 \Rightarrow 6(36k^3 + 18k^2 + 3k) + 1$$

$$a = 6k + 2 \Rightarrow 6(36k^3 + 36k^2 + 12k + 1) + 2$$

$$a = 6k + 3 \Rightarrow 6(36k^3 + 37k^2 + 27k + 4) + 3$$

Z těchto možností musí být proto a ve tvaru $6k + 1$ a ze symetrie je zřejmé, že $6k - 1$ a $6k - 2$ to být také nemůžou.

Převedením 1 na opačnou stranu a roznásobením získáváme tvar

$$18p = a^3 - 1$$

$$18p = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

Po dosazení za a získáme rovnici

$$18p = (6k + 1 - 1)((6k + 1)^2 + 6k + 1 + 1)$$

$$18p = 6k(36k^2 + 12k + 1 + 6k + 2)$$

$$18p = 6k(36k^2 + 12k + 6k + 3)$$

A podělením 18 získáme

$$p = k(12k^2 + 4k + 2k + 1)$$

Nyní je zřejmé, že toto číslo bude prvočíslem pouze tehdy pokud $k = 1$. Proto $p = 12 + 4 + 2 + 1 = 19$ což skutečně prvočíslo je, a je to tedy jediným možným řešením.

Úloha 3.C. Na zadní straně fotografie je čtyřúhelník $ABCD$, na straně AB je vyznačený bod E a průsečík úhlopříček je označen jako F. Navíc platí $|AB| = 4$, $|AE| = 3$, $|AF| = 2$, $|FC| = 4$, $|EC| = 4$, $|FD| = 8$. Musím Akrobatce dokázat, že přímka AD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Řešení. Trojúhelníky CAE a BAF jsou podobné podle věty sus $\left(\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{AB}{AF} = 2\right.$ a mají společný úhel u vrcholu A). Proto mají úhly $\sphericalangle AEC$ a $\sphericalangle AFB$ stejnou velikost. A tedy mají stejnou velikost i úhly $\sphericalangle CEB$ a $\sphericalangle AFD$ (jelikož se jedná o úhly vedlejší k úhlům $\sphericalangle AEC$ a $\sphericalangle AFB$). A opět podle věty sus jsou proto podobné trojúhelníky AFD a BEC $\left(\frac{|FD|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|EB|} = 4\right)$. Z podobnosti vyplývá, že $|\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle FAD| = |\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ABC|$ a proto podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je přímka FA tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Úloha 3.D. Řekl jsem Akrobatce, že pokud a, b, c jsou strany trojúhelníka a r poloměr kružnice jemu opsané, platí potom že

$$\frac{(a+b+c)^2}{4abc} > \frac{1}{r}.$$

Teď ale ještě musím dokázat, že je to pravda.

Řešení. Pomůžeme si dvojím vyjádřením obsahu S trojúhelníka se stranami a, b, c. První je pomocí Heronova vzorce, který nám říká

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Druhý dostaneme úpravou vzorce

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

kde γ je úhel sevřený stranami a, b. Ze sinové věty víme, že

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané. Tedy $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$. Celkem tedy máme

$$S = \frac{abc}{4r}.$$

Nyní využijeme AG nerovnost:

$$\frac{a+b+c}{4}=\frac{s+(s-a)+(s-b)+(s-c)}{4}>\sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{S}=\sqrt{\frac{abc}{4r}}.$$

Opravdu ji použít můžeme: všechna čtyři čísla s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ jsou z trojúhelníkové nerovnosti kladná. Rovnost v AG nerovnosti nastává, když jsou všechny proměnné stejné, tj. aby v této nerovnosti nastala rovnost, muselo by platit $s=s-a$ a tedy $a=0$, což nelze. Proto je daná nerovnost opravdu ostrá.

Celkem jsme tedy dostali

$$\frac{a+b+c}{4}>\sqrt{\frac{abc}{4r}}.$$

Nyní stačí umocnit a obě strany vynásobit číslem $\frac{4}{abc}$ (které je kladné, jedná se tedy o ekvivalentní úpravu) a dostaneme požadovanou nerovnost.