Řešení 2. série

Důkazy

Úloha 2.1. Klíčové, pro mou cestu časem bylo zjistit, zda platí Alexandrovského hypotéza. Měl jsem před sebou řadu známých tvrzení o kterých jsem nevěděl, jestli platí, ale zjistil jsem o nich různé vztahy.

- Pokud neplatí Bakovského domněnka, tak platí Coquinova domněnka.
- Pokud platí Dantova věta, tak platí Alexandrovského hypotéza nebo Velká Eliášova věta.
- Pokud neplatí Fisherova hypotéza a platí Bakovského domněnka, tak platí Güblerova domněnka.
- Z platnosti Coquinovy domněnky plyne, že Velká Eliášova věta neplatí.
- Jestliže neplatí Alexandrovského hypotéza a platí Güblerova domněnka nebo Fisherova hypotéza, tak platí i Coquinova domněnka.
- Dantova věta platí.

Řešení. Pozorný čitateľ si všimne, že všetky vzťahy sa dajú formalizovať vo výrokovej logike s premennými reprezentujúcimi jednotlivé vety, domienky a hypotézy. Vzťahy zapísané formálne vyzerajú nasledovne:

1. $\neg B \implies C$
2. $D \implies A \vee E$
3. $\neg F \wedge B \implies G$
4. $C \implies \neg E$
5. $\neg A \wedge (G \vee F) \implies C$
6. D

Chceme ukázať, že ak sú predošlé vzťahy pravdivé, tak A musí byť pravdivé. Ukážeme to pomocou dôkazu sporom. Pre spor predpokladajme, že všetky tvrdenia 1. – 6. sú pravdivé a A je nepravdivé, teda platí $\neg A$. V ďalších krokoch budeme pomocou známych faktov odvodzovať nové, ktoré potom použijeme v ďalších odvodeniach.

- Z 2. a 6. plynie $A \lor E$. Potom z $A \lor E$ a $\neg A$ plynie E.
- Z obmeny 4., teda z formule $E \implies \neg C$, a z E vyplýva $\neg C$.
- Z obmeny 1., teda z $\neg C \implies B$, a z $\neg C$ vyplýva B.
- Z obmeny 5., teda z $\neg C \implies \neg(\neg A \land (G \lor F))$, a z $\neg C$ vyplýva $\neg(\neg A \land (G \lor F))$. Vďaka DeMorganovym zákonom vieme, že to je to isté ako $A \lor (\neg G \land \neg F)$. Keďže $\neg A$, tak musí platiť $\neg G \land \neg F$.
- Z predošlých krokov vieme, že platí B a $\neg F$. Preto podľa 3. musí platiť G.

V predošlých bodoch sme odvodili G a zároveň $\neg G$, čo je spor. Z toho vyplýva, že ak sú pravdivé tvrdenia 1. – 6., tak aj A musí byť pravdivé.

Dôkaz ukončíme tým, že dáme príklad priradenia, kde A je pravdivé a 1. – 6. sú pravdivé. Jedno z takých priradení je napríklad: $A = C = D = 1, B = E = F = G = 0$.

Úloha 2.2. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že pokud rovnice $x^3 - y^3 = p$ má přirozená řešení x, y, pak existuje celé číslo k takové, že $p = 3k^2 + 3k + 1$. A naopak pokud takové k existuje, pak rovnice $x^3 - y^3 = p$ má přirozené řešení.

Řešení. „$\Rightarrow$“

Předpokládáme, že rovnice má řešení x, y, kde x, y jsou přirozená čísla. Vzorcem pro rozdíl mocnin upravíme rovnost na $p = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Prvočíslo je dělitelné pouze dvěma přirozeným čísly, 1 a samo sebou, proto buď $x - y = 1$, nebo $x^2 + xy + y^2 = 1$. O x a y však předpokládáme, že jsou přirozená, a tedy je druhý z výrazů větší než 1. Proto $x - y = 1$, tedy $x = y + 1$, což dosadíme do $p = x^2 + xy + y^2$ a dostaneme:

$$
\begin{aligned}
p &= (y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 \\
p &= y^2 + 2y + 1 + y^2 + y + y^2 \\
p &= 3y^2 + 3y + 1.
\end{aligned}
$$

Hledané k dostaneme jako y, což je dokonce přirozené číslo.

„$\Leftarrow$“

Předpokládáme, že p lze zapsat jako $3k^2 + 3k + 1$, kde k je celé číslo. Jestliže je k přirozené číslo, můžeme v řešení postupovat pozpátku, „tipnout“ si $y = k$, $x = k + 1$ a ověřit, že se skutečně jedná o řešení rovnice $x^3 - y^3 = p$, neboť $p = 3k^2 + 3k + 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = (k + 1)^3 - k^3$. Pro $k = 1$ nebo $k = -1$ vidíme, že $3k^2 + 3k + 1$ nevyjadřuje žádné prvočíslo. Zbývá vyšetřit $k < -1$.

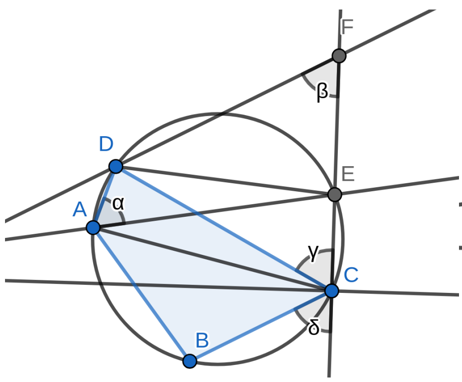
$$
\begin{aligned}
p &= -[-(k + 1)^3 - (-k)^3] \\
p &= (-k)^3 - [-(k + 1)]^3
\end{aligned}
$$

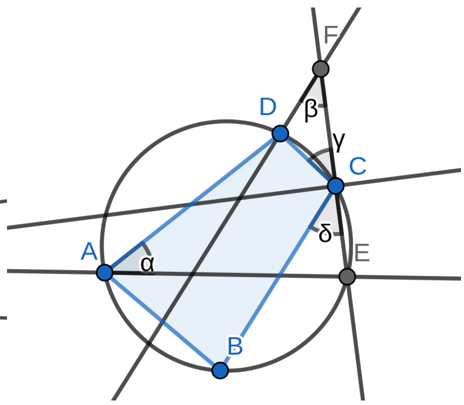
Tedy $x = -k$, $y = -k - 1$.

Úloha 2.3. Věděl jsem, že portál do minulosti musí mít tvar čtyřúhelníku $ABCD$. Dále, že musí být dána osa úhlu o_a u vrcholu A, osa úhlu o_c u vrcholu C, kolmice e k o_c, procházející vrcholem C. Průsečík o_a a e jsem nazval E. Taky je dána přímka f, která je rovnoběžná se stranou BC a prochází bodem D. Průsečík e a f jsem nazval F. Potřeboval jsem dokázat, že následující tři tvrzení jsou v ekvivalenci (pokud platí kterékoli z nich, tak platí všechny tři):

- Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový
- Čtyřúhelník $ACED$ nebo $AECD$ (podle toho, který je konvexní, uvažte obě varianty) je tětivový
- Čtyřúhelník $AEFD$ je obecnější případ deltoidu (úhel $\sphericalangle DFE$ je shodný s úhlem $\sphericalangle EAD$).

Řešení. Vlastnosti si označme $I.$ (čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový), $II.$ (čtyřúhelník $ACED$ nebo $AECD$ je tětivový) a $III.$ (čtyřúhelník $AEFD$ je obecnější případ deltoidu). Stačí nám totiž ukázat pouze tři implikace, a to $I. \Rightarrow II.$, $II. \Rightarrow III.$ a $III. \Rightarrow I.$ Zbylé tři implikace už lze seskládat z těchto (např. $II. \Rightarrow I.$ získáme jako $II. \Rightarrow III. \Rightarrow I.$).





„$I. \Rightarrow II.$", ACED konvexní (první obrázek) Protože je čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, platí $2\alpha = 180° - |\sphericalangle BCD|$, čili $\alpha = 90° - |\sphericalangle BCD| = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$. A protože je tětiva DE vidět z bodu A pod stejným úhlem jako z bodu C, leží $ACED$ na jedné kružnici.

„$I. \Rightarrow II.$", AECD konvexní (druhý obrázek) Protože je čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, platí $2\alpha = 180° - |\sphericalangle BCD|$, čili $\alpha = 90° - \frac{|\sphericalangle BCD|}{2} = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$. A protože $|\sphericalangle DCE| = 180° - \gamma = 180° - \alpha$, je AECD tětivový.

„$II. \Rightarrow III.$", ACED konvexní (první obrázek) $\gamma = \alpha$ (obvodové úhly k tětivě DE), $\gamma = \delta$ (souměrné úhly podle osy o_c), $\delta = \beta$ (souhlasné úhly u rovnoběžek), z čehož plyne $\alpha = \beta$.

„$II. \Rightarrow III.$", AECD konvexní (druhý obrázek) $\alpha = 180° - |\sphericalangle DCE| = \gamma$, $\gamma = \delta$ (souměrné úhly podle osy o_c), $\delta = \beta$ (souhlasné úhly u rovnoběžek), z čehož plyne $\alpha = \beta$.

„III. ⇒ I.“ $\alpha = \beta$ (předpoklad) $\beta = \delta$ (shodné úhly u rovnoběžek) $\delta = 90° - (90° - \delta) = 90° - \frac{|\sphericalangle BCD|}{2} = \alpha$. Z toho plyne $2\alpha = 180° - |\sphericalangle BCD|$ a čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

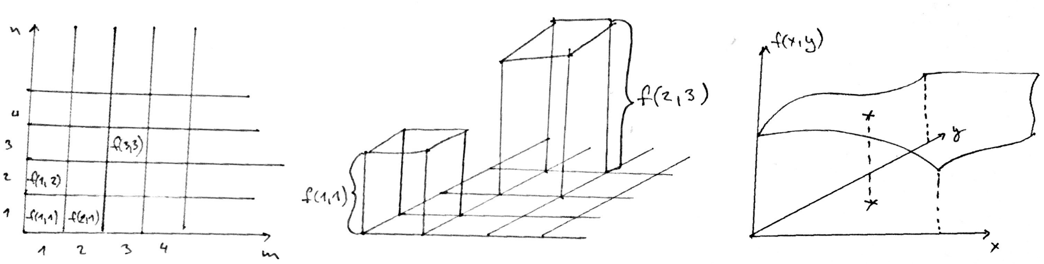
Úloha 2.4. Nechť f je funkce dvou reálných proměnných taková, že $f(1,1) = 2$ a pro všechny přirozená čísla m, n platí

$$\begin{cases} f(m+1,n) = f(m,n) + 2(m+n) \\ f(m,n+1) = f(m,n) + 2(m+n-1). \end{cases}$$

Ukažte, že platí

$$f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2.$$

Řešení. Nejdříve slovo o tom, jak si představit funkci dvou proměnných. Pokud proměnné bereme např. z oboru celých (či přirozených) čísel, je dobré si funkci nakreslit jako tabulku, kde každé políčko má souřadnice m, n a obsahuje hodnotu $f(m,n)$. (Tip: hodnoty funkce můžeme interpretovat jako výšku jednotlivého políčka a pro reálné proměnné, „kde jsou políčka nekonečně malá“, dostáváme plochu nad rovinou, viz obrázek.)



Dále si všimněme, že funkce f je v bodě m, n definována více způsoby - z $(1,1)$ můžeme jít nejdříve doprava o m, poté nahoru o n a nebo opačně (nebo ještě dalšími cestami). Je vždy dobré se přesvědčit, že tyto způsoby koincidují a funkce je dobře definována. Na tomto místě stačí ukázat, že dopadne stejně cesta o 1 nahoru a pak o 1 doprava jako o 1 doprava a pak o 1 nahoru (neboli že kroky nahoru a doprava komutují). Každou cestu pak pomocí tohoto jednoduchého pravidla umíme porovnat s jinou. Jedná se o jednoduchý výpočet, který nyní přeskočíme.

Vyjma políček $(1,n)$ se do každého políčka tabulky umíme dostat zprava, stačí tedy uvážit jednoduchou implikaci $\forall m,n \in \mathbb{N}$:

$f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 \Rightarrow f(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2$:

$$\begin{aligned} f(m+1,n) &= f(m,n) + 2(m+n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2(m+n) \\ &= (m^2 + n^2 + 2mn - (m+n) - 2n + 2 + 2m + 2n) + 1 - 1 \\ &= (m^2 + n^2 + 2mn + 2m + 2n + 1) - (m+1+n) - 2n + 2 \\ &= (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2. \end{aligned}$$

To nám říká, že pokud platí rovnost pro nějaké políčko, platí i ve všech políčkách napravo od něj. Pro důkaz tvrzení už stačí jen dokázat, že rovnost platí v prvním sloupci:

$\forall n \in \mathbb{N}$: $f(1,n) = (1+n)^2 - (1+n) - 2n + 2 = 1 + 2n + n^2 - 1 - n - 2n + 2 = n^2 - n + 2$.

To provedeme indukcí k n. Máme $f(1,1) = 2$, čímž je splněna rovnost pro $n = 1$. Předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké n a ukažme, že platí i pro $n+1$: $f(1,n+1) = f(1,n) + 2(1+n-1) = n^2 - n + 2 + 2n = (n+1)^2 - (n+1) + 2$. Tím je důkaz hotov

Úloha 2.A. Nakreslil jsem dvě kružnice, které se protínají. Aby nebyl portál nakloněný, potřeboval jsem dokázat, že spojnice průsečíků je kolmá na spojnici středů.

Řešení. Označme středy kružnic S a T a jejich dva průsečíky P a Q. Konečně průsečík přímek PQ a ST označme R. Pak trojúhelníky STP a STQ jsou shodné podle věty *sss*. Sdílí totiž společnou stranu ST, $|SP| = |SQ|$ a $|TP| = |TQ|$. Poslední dvě rovnosti vyplývají z toho, že se jedná o různé poloměry stejných kružnic. Protože trojúhelníky STP a STQ jsou shodné, jsou shodné také úhly $\sphericalangle TSP$ a $\sphericalangle TSQ$. Proto jsou podle věty *usu* shodné i trojúhelníky RSP a RSQ. To ovšem znamená, že $|\sphericalangle SRP| = |\sphericalangle SRQ|$, ale zároveň je jejich součet 180°. Každý z těchto úhlů musí být tedy nutně pravý, což jsme chtěli dokázat.

Tato úvaha neplatí, pokud S leží na tětivě PQ. V takovém případě je totiž trojúhelník SRP degenerovaný na úsečku. Je ovšem zřejmé, že vždy aspoň jeden z obou středů nebude ležet na tětivě PQ a tento si tedy můžeme označit S. Pak naše úvaha bude vždy korektní.

Úloha 2.B. Na zeď jsem následně napsal čísla od jedné do n v klasickém pořadí. Na další řádek jsem je potom napsal v jiném pořadí. Na třetí řádek jsem napsal rozdíl dvou čísel nad ním (vždy první mínus druhé). Stalo se přesně to, co jsem čekal. Součet čísel na třetím řádku byl vždy 0. Teď jsem to jen potřeboval dokázat.

Řešení. Tato úloha měla dva možné přístupy. Složitější byl sledovat, kam se posouvají jednotlivá čísla. Například pokud se jednička posune na pozici 3, sledujeme kam se posunulo číslo 3 a tak dále. Není těžké si uvědomit, že takováto posloupnost se musí zacyklit a někdy se budeme opět ptát kam se posunulo číslo 1. Pokud sečteme všechna tato posunutí v jednom takovém cyklu, vždy získáme nulu. Konečně každé přeuspořádání čísel si můžeme vyjádřit jako složení několika takových cyklů, tedy součet všech posunutí musí být také nulový.

Mnohem jednodušší řešení ovšem bylo prostě odečíst všechna čísla. Díky komutativitě sčítání dostáváme, že ve třetím řádku je součet všech čísel z prvního řádku zmenšený o součet všech čísel v druhém řádku. Protože oba řádky obsahují stejná čísla, jsou si oba součty rovny a výsledný rozdíl je proto nulový.

Úloha 2.C. Pamatoval jsem si, že aby mohlo být liché číslo dokonalé, nesmí se jednat o druhou mocninu přirozeného čísla. Potřeboval jsem však důkaz. (Poznámka: dokonalé číslo je takové přirozené číslo n, pro které platí, že součet všech jeho přirozených dělitelů mimo samo n je roven číslu n. Například $1 + 2 + 3 = 6$ nebo $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.)

Řešení. Budeme dokazovat sporem:

Předpokládejme tedy, že existuje liché dokonalé x, které je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla (označme ho k). Jelikož x je liché, tak budou liší i všichni jeho dělitelé.

Ukažme, že x má lichý počet dělitelů. Pro každé d dělící číslo x, které je menší než k, existuje jednoznačně určený dělitel $\frac{n}{d}$, který je větší než k a naopak. Existuje mezi nimi tedy bijekce a můžeme je tedy rozdělit do dvojic, z čehož vyplývá, že všech dělitelů kromě k je sudý počet a s k dohromady jich je tedy lichý počet.

Dostáváme tedy, že počet dělitelů čísla x, kteří jsou menší než x je sudý. Potom bude sudý i jejich součet (jelikož jsou všichni sčítanci liší), který je ale roven samotnému x, které je liché, což je spor.

Úloha 2.D. Poslední řádek výpočtu, který mi chyběl vypadal takto: Nechť $x < -1$, $y > 1$ jsou reálná čísla. Ukažte, že platí

$$\frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}} > 3.$$

Řešení. Úlohu šlo řešit mnoha způsoby, například různými variacemi na AG nerovnost či pomocí kvadratické nerovnosti. Jako vzorák předkládám řešení Vaška Zvoníčka, které patří mezi nejelegantnější a je velmi dobře sepsané.

Začneme úpravou čitatele:

$$\frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}} = \frac{(x^2-1)+(y^2-1)-2xy+2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}}.$$

Nyní provedeme substituci $a = x^2 - 1$ $b = y^2 - 1$. Substituci u smíšeného členu provedeme takto: $xy = -\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$ (všimněme si znaménka $-$. které se zde vyskytuje z toho důvodu, že obor hodnot odmocniny je $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ale hodnota xy díky podmínkám $x < -1, y > 1$ je záporná). Po provedení uvedené substituce a vynásobením nerovnosti jmenovatelem, což je ekvivalentní úprava, neboť jmenovatel zřejmě nabývá kladných hodnot, dostaneme nerovnost ekvivalentní té naší:

$$a + b + 2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1} + 2 > 3(\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Po substituci pracujeme s kladnými proměnnými. Jsme tak oprávněni užít AG nerovnosti, po jejíž aplikaci dostaneme

$$\frac{(a+1)+(b+1)+2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}}{3} \geq \sqrt[3]{2(a+1)^{\frac{3}{2}}(b+1)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{(a+1)(b+1)}.$$

Pokud ukážeme, že

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{(a+1)(b+1)} > \sqrt{a}+\sqrt{b},$$

budeme hotovi. Postačí ukázat, že

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+1)(b+1)} &\geq \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ ab+a+b+1 &\geq a+b+2\sqrt{ab} \\ (\sqrt{ab}-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Protože $\sqrt[3]{2} > 1$, platí tak i

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{(a+1)(b+1)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Všechny úpravy byly ekvivalentní, důsledek při vynásobení $\sqrt[3]{2}$ lze ověřit, že nebude vadit ekvivalenci: Pokud $a \geq b$, tak pro $c > 1$ zřejmě platí $c \cdot a > b$. Poté se zpětnými úpravami dostaneme k původní nerovnosti.

Tím je důkaz hotov.