Řešení 1. série

Theodorův cirkus času

Úloha 1.1. Dva kluci hrají hru na prstech. Každý krčí prsty jedné ruky. Jednotlivé prsty mají svou hodnotu: palec a malíček 1, ukazováček a prsteníček 2, prostředníček 3. První kluk začne skrčením jednoho prstu. Následně se střídají v tazích. Ve svém tahu musí hráč skrčit 1, 2, nebo 3 prsty podle toho, kolik byla maximální hodnota skrčeného prstu z tahu předchozího hráče.

Např. pokud hráč A skrčí prsty s hodnotou 3 a 1, hráč B musí skrčit 3 prsty.

Pomozte jim zjistit, kterými prsty mohou začít, aby na konci měli na obou rukou skrčené všechny prsty.

Řešení. Hra mohla začať skrčením ľubovoľného prstu. Korektný dôkaz tohoto tvrdenia je pre každý prst ukázať, ako môže hra pokračovať. Nakoľko palec a malíček, respektíve ukazovák a prsteníček sú prsty rovnakej hodnoty, v každej hre sú medzi sebou zameniteľné. Stačí teda ukázať tri hry, ktoré začínajú rôznym prstom: prostredníček, ukazovák a palec.

Hra, kde sa začína prostredníčkom:

1. Hráč A pokrčí prostredníček (hodnota 3).
2. Hráč B pokrčí prostredníček, prsteníček a ukazovák (hodnoty 3, 2, 2).
3. Hráč A pokrčí ukazovák, prsteníček a palec (hodnoty 2, 2, 1).
4. Hráč B pokrčí palec a malíček (hodnoty 1, 1).
5. Hráč A pokrčí malíček (hodnota 1).

Hra, kde sa začína ukazovákom:

1. Hráč A pokrčí ukazovák (hodnota 2).
2. Hráč B pokrčí palec a malíček (hodnoty 1, 1).
3. Hráč A pokrčí prostredníček (hodnota 3).
4. Hráč B pokrčí prostredníček, ukazovák a prsteníček (hodnoty 3, 2, 2).
5. Hráč A pokrčí prsteníček, palec a malíček (hodnoty 2, 1, 1).

Hra, kde sa začína palcom:

1. Hráč A porkčí palec (hodnota 1).
2. Hráč B pokrčí palec (hodnota 1).
3. Hráč A pokrčí malíček (hodnota 1).
4. Hráč B pokrčí prostredníček (hodnota 3).
5. Hráč A pokrčí prostredníček, ukazovák a prsteníček (hodnoty 3, 2, 2).
6. Hráč B pokrčí ukazovák, prsteníček a malíček (hodnoty 2, 2, 1).

Úloha 1.2. Krys a Myš stále naléhají a chtějí po mně, abych byl molekula. Důležité prý navíc je, aby v ní každý atom byl propojen právě se třemi jinými atomy. Jaké počty atomů můžu jako molekula mít?

Řešení. Jako molekula mohu mít jakýkoliv sudý počet atomů větší nebo roven 4.

1. Molekula nemůže obsahovat lichý počet atomů. Důkaz provedeme spočtením všech vazeb. Předpokládejme, že atomů je n kde n je liché a každý atom sousedí právě se třemi atomy. Pak celkový počet vazeb je polovina součinu $3 \cdot n$, protože každou vazbu v součinu započítáme dvakrát (jednou za každý z jejich koncových atomů). Protože celkový počet vazeb p je roven $\frac{3n}{2}$ a $3n$ je liché číslo platí, že p není celočíselné. To je ovšem zřejme ve sporu s tím, že počet vazeb by celočíselný být měl. Proto počet atomů nemůže být lichý.
2. Je zřejmé, že pro 2 atomy nemůže mít žádný atom 3 sousedy.
3. Pro $n = 4$ uvažme čtyřstěn (neboli čtverec i s úhlopříčkami). Pro větší sudá n utvořme dva $\frac{n}{2}$−úhelníky jako podstavy hranolu a spojme odpovídající si vrcholy napříč $\frac{n}{2}$−úhelníky. V hranolu vychází z každého vrcholu právě 3 hrany.

Úloha 1.3. V místnosti je devět krabic v mřížce 3×3. V jedné z nich je kouzelná kočka. U stropu visí velké zlaté hodiny. Krys a Myš mi vysvětlili, že každou minutu se můžu podívat do dvou krabic. Až minuta uplyne, z hodin vylétne sprška jisker a kočka se přemístí do jedné ze (stranově) sousedních krabic. Lze kočku najít po konečném počtu minut?

Řešení. Nejdůležitější myšlenka celé úlohy je, že kočka se vždy musí pohnout. Tedy v minutě t se nenachází v krabici k, pokud se v minutě $t - 1$ nenacházela ani na jedné ze sousedních krabic krabice k (ale v samotné krabici k se nacházet mohla). Navíc v každé minutě můžeme zvolit dvě krabice. Pokud v nich kočka je, našli jsme ji v konečném čase. Pokud zde není, můžeme tyto krabice zahrnout do množiny krabic, o kterých víme, že se v nich kočka nemůže nacházet.

Stav informací, které víme můžeme charakterizovat uspořádanou trojicí (M, N, O), kde M je množina krabic, kde kočka být může, N množina krabic, kde kočka být nemůže, protože se zde nemohla dostat a O je množina otevřených krabic. Krabice očíslujme postupně po řádcích 1 až 9. V první minutě kočka může být kdekoli, ale můžeme si vybrat 2 krabice, do kterých se podíváme. Například volbou 6 a 8 získáváme stav $(\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}, \{\}, \{6, 8\})$. V další minutě vidíme, že s krabicí 9 nesousedí žádné krabice, ve kterých mohla být kočka, a proto zde tuto minutu kočka být také nemůže. Opakováním této myšlenky postupně eliminujeme všechny krabice ($\to$ značí posun kočky, $\vdash$ značí otevření dvou krabic):

$$\begin{aligned}
(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{\},\{\}) &\vdash (\{1,2,3,4,5,7,9\},\{\},\{6,8\}) \to \\
(\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{9\},\{\}) &\vdash (\{1,2,3,4,6,8\},\{9\},\{7,5\}) \to \\
(\{1,2,3,4,5,6,7,9\},\{8\},\{\}) &\vdash (\{1,2,3,5,7,9\},\{8\},\{4,6\}) \to \\
(\{1,2,3,4,5,6,8\},\{7,9\},\{\}) &\vdash (\{2,3,4,6,8\},\{7,9\},\{1,5\}) \to \\
(\{1,2,3,5,6,7,9\},\{4,8\},\{\}) &\vdash (\{1,3,5,7,9\},\{4,8\},\{2,6\}) \to \\
(\{4,8,2,6\},\{1,3,5,7,9\},\{\}) &\vdash (\{2,6\},\{1,3,5,7,9\},\{4,8\}) \to \\
(\{1,3,5,9\},\{2,4,6,7,8\},\{\}) &\vdash (\{1,3\},\{2,4,6,7,8\},\{5,9\}) \to \\
(\{2,4,6\},\{1,3,5,7,8,9\},\{\}) &\vdash (\{2\},\{1,3,5,7,8,9\},\{4,6\}) \to \\
(\{1,3,5\},\{2,4,6,7,8,9\},\{\}) &\vdash (\{1\},\{2,4,6,7,8,9\},\{3,5\}) \to \\
(\{2,4\},\{1,3,5,6,7,8,9\},\{\}) &\vdash (\{\},\{1,3,5,6,7,8,9\},\{2,4\})
\end{aligned}$$

Vidíme, že po popsané posloupnosti nahlížení do krabic jsme redukovali množinu krabic, ve kterých kočka být může, na prázdnou. Proto lze kočku vždy najít v konečném čase.

Úloha 1.4. Pro jaké parametry $a, b \in \mathbb{R}$ má následující soustava nerovnic jediné řešení pro proměnné $x, y \in \mathbb{R}$ a jaké je to řešení?

$$\begin{aligned}
a^2 + a &\geq x \\
x^2 + x &\leq b \\
b^2 + b &\geq y \\
y^2 + y &\leq a.
\end{aligned}$$

Řešení. Zopakujme nejprve nějaká fakta o kvadratických funkcích a nerovnicích. Kvadratická funkce je funkce tvaru $f(x) = ux^2 + vx + w$, kde $u, v, w \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$. Grafem této funkce je parabola, jejíž vrchol má x-ovou souřadnici $-\frac{v}{2u}$. Pokud je u kladné, tak je ve vrcholu minimum a hodnoty funkce jdou s rostoucím x do nekonečna, pokud je u záporné, je tomu naopak. Rovnice $f(x) = 0$ má řešení, právě když osa x tuto parabolu protíná, a tato řešení jsou tvaru $x = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}$.

Tedy je-li u kladné, máme

$$\begin{aligned}
f(x) \leq 0 &\Leftrightarrow x \in \left\langle \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}, \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u} \right\rangle, \\
f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}, \infty \right).
\end{aligned}$$

Pro záporné u by tomu bylo přesně naopak.

Všimněme si, že druhá a čtvrtá nerovnice jsou vlastně kvadratické nerovnice pro x, y s parametry b, a. Proto má-li soustava nějaké řešení x, y, z výše zmíněných poznatcích o kvadratických nerovnicích dostáváme $x \in \langle -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4b}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2} \rangle$. Analogické vyjádření s a místo b dostaneme i pro y. Z první a třetí rovnice navíc platí $x \in (-\infty, a^2 + a), y \in (-\infty, b^2 + b)$.

Celkem tedy máme

$$x \in (-\infty, a^2 + a) \cap \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4b}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2} \right\rangle,$$
$$y \in (-\infty, b^2 + b) \cap \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2} \right\rangle.$$

Nyní si uvědomme, že volbou $a = b = \frac{1}{4}$ dostaneme jediné řešení $x = y = -\frac{1}{2}$ (v tomto případě interval $\langle -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4b}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2} \rangle$ obsahuje pouze jediné číslo, a to $-\frac{1}{4}$, a stejně tak pro a). Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel a, b se od čísla $-\frac{1}{4}$ liší. Bez újmy na obecnosti řekněme, že to bude b. Oba intervaly, v jejichž průniku leží x, tedy obsahují více než jeden bod. Aby byl tedy jejich průnik jednobodový, muselo by nastat $a^2 + a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4b}}{2}$, tedy $a^2 + a < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$. Ale $a^2 + a = (a + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ (protože druhá mocnina je vždy nezáporná), což nám dohromady dává spor. Opravdu je tedy jediné řešení tvaru $a = b = \frac{1}{4}$, $x = y = -\frac{1}{2}$.

Úloha 1.A. Jen za pomocí kružítka popište následující konstrukce:

1. Jsou dány dva body A a B vzdáleny od sebe d. Sestrojte třetí bod C, který bude ležet na polopřímce $\overrightarrow{AB}$ a bude od A vzdálený $2d$.
2. Je dána kružnice k, její střed S, bod A, který leží na k a bod A', který je obrazem bodu A v osové souměrnosti podle dané neznámé osy o. Sestrojte obraz kružnice k v osové souměrnosti podle o.
3. Jsou dány 2 body vzdálené od sebe 1. Vyrobte vzdálenost $\sqrt{3}$.

Řešení. Nejdříve připomeneme, jak ze zapisuje geometrická konstrukce. Bod obvykle zadáváme tak, že napíšeme jeho název, středník a pak určíme jednu polohu. Třeba zápis $X; X \in s \cap t$ znamená, že sestrojíme bod X, který leží v průniku objektů s a t (tedy tam, kde se tyto dva objekty protínají či překrývají). Kružnici potom zadáváme jako $k(S, |ST|)$, což znamená, že sestrojíme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem délky $|ST|$.

1. Vzdálenost $2d$ realizujeme jako úhlopříčku šestiúhelníku, který bude mít střed v bodě B a bod A bude jeden z jeho vrcholů. Nechť $|AB| = d$, konstrukce:

   1. $k(B, |AB|)$
   2. $l(A, |AB|)$
   3. $C; C \in k \cap l$
   4. $m(C, |AB|)$
   5. $D; D \in l \cap m, D \neq A$
   6. $n(D, |AB|)$
   7. $E; E \in m \cap n, E \neq C$

   Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABC, BCD, BDE jsou rovnostranné, bod E leží na polopřímce AB. Zároveň $|AE| = 2d$.

2. Všimněme si, že osová souměrnost zachovává vzdálenosti, proto musí platit $AS = A'S'$ a zároveň ze symetrie také $AS' = A'S$. S' tedy najdeme jako průsečík kružnic $k(A', |AS|)$ a $l(A, |SA'|)$. V obecném případě dvou průniků musíme vybrat ten, který leží na stejné polorovině dané přímkou AA' jako bod S.

3. Nechť $|AB| = 1$, zkonstruujme vzdálenost $\sqrt{3}$ jako dvojnásobek výšky v rovnostranném trojúhelníku:

   1. $k(B, |AB|)$
   2. $l(A, |AB|)$
   3. $C; D \in k \cap l, C \neq D$

   Potom $|CD| = \sqrt{3}$, neboť trojúhelníky ABC a ABD jsou rovnostranné se stranou 1 a jejich výšky jsou podle Pythagorovy věty $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

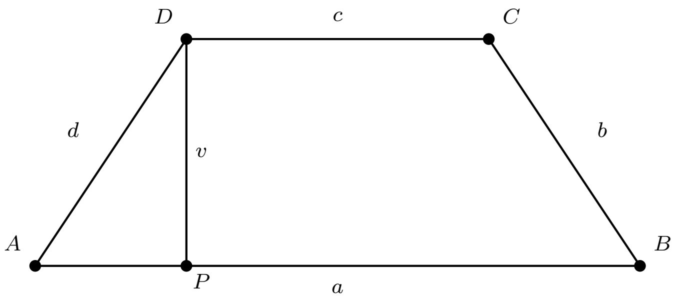
Jiná možná konstrukce by byla sestrojit délku $\sqrt{2}$ pomocí Pythagorovy věty jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka se shodnými přeponami délky 1 a potom sestrojit délku $\sqrt{3}$ jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délek 1 a $\sqrt{2}$.

Úloha 1.B. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Označme jeho ostrý vnitřní úhel u vrcholu A α, jeho základny a, c, kde $a \geq c$ a jeho obsah S.

Pro jaký úhel α platí:

$$4S = a^2 - c^2 \ ?$$

Řešení. Označíme si P patu kolmice na AB procházející D.



Obsah lichoběžníku se spočítá jako

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = \frac{av}{2} + \frac{cv}{2} = \frac{a+c}{2} \cdot v \tag{1}$$

Ze zadání víme, že musí platit

$$4S = a^2 - c^2 \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vyplývá, že musí platit

$$\begin{aligned} 4\frac{a+c}{2} \cdot v &= a^2 - c^2 \\ 2v(a+c) &= (a+c)(a-c) \qquad / - (a+c)(a-c) \\ 2v(a+c) - (a+c)(a-c) &= 0 \\ (a+c)(2v - (a-c)) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Z rovnice (3) plyne, že musí platit alespoň jedna z rovnic:

a) $a + c = 0$

b) $2v - (a - c) = 0$

Jelikož a i c jsou strany lichoběžníku, platí $a, c > 0$. Tudíž a) nikdy nenastane. Proto musí nastat b).

$$\begin{aligned} 2v - (a - c) &= 0 && / + (a - c) \\ 2v &= a - c && / : 2 \\ v &= \frac{a - c}{2} && (4) \end{aligned}$$

Jelikož $|AP| = \frac{a-c}{2}$ a $v = \frac{a-c}{2}$, trojúhelník $\triangle APD$ je rovnoramenný s přeponou AD. Jelikož $|\sphericalangle APD| = 90°$ a $\triangle APD$ je rovnoramenný, platí

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle PAD| = \frac{180° - |\sphericalangle APD|}{2} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$$

Zadání je splněno pouze pro $\alpha = 45°$.

Úloha 1.C. Nechť A, B jsou krajní body čtvrtkružnice k se středem v bodě S. Body C, D leží po řadě na úsečkách AS a BS a platí, že kolmice jimi vedené k úsečkám, na kterých leží, protínají k ve stejném bodě. Lze pouze ze znalosti vzdáleností $|AC|$ a $|BD|$ jednoznačně určit poloměr kružnice?

Řešení. Nejprve označme $a = |AC|, b = |BD|$ a r poloměr dané kružnice. Aby platilo, že C leží na úsečce AS a D leží na BS, tak musí platit následující nerovnosti:

$$r \geq a \geq 0, \quad r \geq b \geq 0.$$

Nejprve vyřešme hraniční případy:

- Pokud by jeden z bodů (bez újmy na obecnosti C) ležel na kružnici, tak druhý musí ležet ve středu (aby se kolmice z D protínala s kolmicí z C na k) a tím pádem bude $b = r$ a poloměr umíme jednoznačně určit.
- A naopak pokud by bod C ležel ve středu kružnice, tak kolmice na AS procházející C prochází kružnicí v bodě B, kde musí tím pádem ležet i D a $r = a$ je opět jednoznačně určený poloměr.

Předpokládejme tedy, že C, D jsou po řadě vnitřní body úseček AS, BS. Označme E bod, na k, ve kterém se protnou kolmice z C a D. Potom $SCED$ je obdélník (3 úhly jsou ze zadání pravé), pro který platí, že $|SC| = r - a, |SD| = r - b$ a $|SE| = r$. Pokud se nyní podíváme na trojúhelník SAE, tak podle Pythagorovy věty dostáváme rovnici v proměnné r s parametry a, b, tu upravujme:

$$\begin{aligned} (r - a)^2 + (r - b)^2 &= r^2 \\ r^2 - 2ra + a^2 + r^2 - 2rb + b^2 &= r^2 \\ r^2 - 2r(a + b) + a^2 + b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho dostáváme (podle vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice):

$$r_{1,2} = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{8ab}}{2} = a + b \pm \sqrt{2ab}.$$

Navíc podle trojúhelníkové nerovnosti pro ten stejný trojúhelník platí:

$$\begin{aligned}(r-a)+(r-b) &> r\\ 2r-a-b &> r\\ r &> a+b.\end{aligned}$$

Potom $r_1 = a + b + \sqrt{2ab}$, což je validní řešení, jelikož je kladné a zřejmě větší než a. Pro r_2 platí následující:

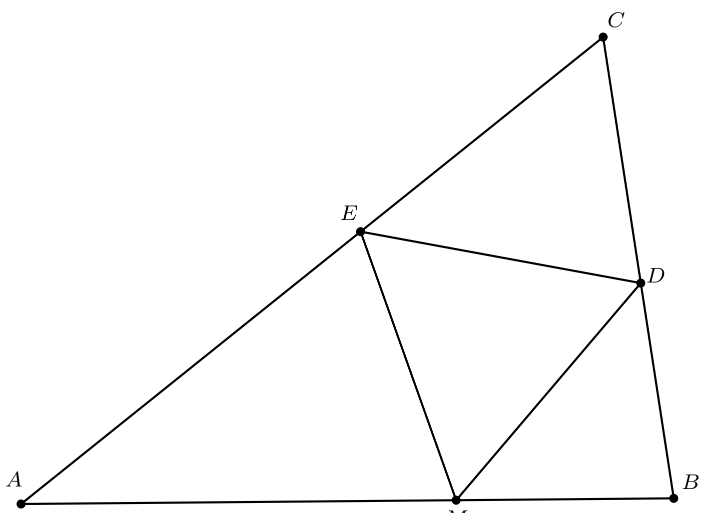
$$r_2 > a + b > a + b - \sqrt{2ab} = r_2,$$

což je spor, a tedy r_2 není řešení vyhovující zadání. Dostáváme tedy jediné řešení, které jsme zvládli určit jednoznačně v závislosti na a, b.

Řešení nebylo nutné vést přes trojúhelníkovou nerovnost a bylo možné dojít ke sporu s druhým řešením i jinde, ale mně se toto líbilo a děkuju Janu Stoklasovi, kterému se to objevilo v řešení.

Úloha 1.D. V trojúhelníku ABC protínají osy úhlů α a β strany BC a CA po řadě v bodech D a E. Určete velikost úhlu γ u vrcholu C, víte-li, že $AE + BD = AB$.

Řešení.



Ze zadání plyne, že na úsečce AB leží bod M takový, že $|AM| = |AE|$, $|BM| = |BD|$. Označme průsečík přímek AD a ME (resp. BE a MD) jako P (resp. Q). Trojúhelníky AMD a BME jsou zjevně rovnoramenné se základnami MD, ME, proto označíme-li si úhly u vrcholů A a B popořadě jako α a β, dostáváme $|\sphericalangle EMA| = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle DMB| = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Trojúhelníky DPE a DPM jsou shodné podle věty *usu*, tedy $|DE| = |DM|$. Stejně tak jsou shodné trojúhelníky EPD a EPM, z čehož máme $|DE| = |ME|$. Celkem tedy dostáváme, že $|DM| = |DE| = |ME|$ a trojúhelník MDE je rovnostranný, jeho vnitřní úhly mají tedy všechny velikost 60°. Proto platí

$$180^\circ = |\sphericalangle EMA| + |\sphericalangle EMD| + |\sphericalangle DMB| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 60^\circ + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 240^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Z toho dostáváme $\alpha + \beta = 120^\circ$ a tudíž $\gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.