Řešení 6. série

DIOFANTICKÉ ROVNICE

Úloha 6.1. Toho rána měli Henry s Matějem budík nastavený na velmi brzkou hodinu, ale ani to jim nebránilo v pohotovém vstávání, protože se oba na ten den těšili celý rok. Jen co se převlékli, utíkali do koupelny, kde už měli nachystané kbelíky s vodou. A na rozcvičku položil Henry Matějovi otázku: „Které všechny objemy a jak jsme schopní získat pomocí 72 litrové, 168 litrové a 126 litrové nádoby? K dispozici máme ještě neomezenou nádobu a neomezený zdroj vody. Nádoby můžeme mezi sebou libovolně přelévat.“

Řešení. Společný dělitel zadaných čísel je 6 a libovolný objem, který vznikne kombinací těchto čísel musí být taky dělitelný šesti. Ukážeme, že umíme dostat objem 6:

$$126 + 168 - 4 \cdot 72 = 6$$

Umíme tedy (opakováním) vyrobit libovolný (nezáporný) násobek čísla 6.

Úloha 6.2. Henry s Matějem dotáhli ten veliký kýbl plný vody až do pokojíku kde spala Liběnka. „Tak na 3. 1, 2, 3!“, odpočítal Matěj čas útoku a společně vylili celý ten kýbl vody na chuděru spící Liběnku. Ta dlouho spící nezůstala. ”U všech dvojic celých čísel, které splňují

$$(x + y^2)(x^2 + y) = (x + y)^3 \qquad !“$$

Zaklela rozespalým a trochu vyděšeným hlasem. Chvíli se ještě rozkoukávala, kluci, kteří ji normálně neslyší nadávat taky koukali, ale po chvíli ticho prolomil Matěj když se Liběnky zeptal: „A jaké vlastně všechny takové dvojice jsou?“

Řešení. Uvedené řešení je inspirované řešením Vítka Jelínka.

Je zřejmé, že dvojice $(0, t)$ a $(t, 0)$, kde t je libovolné celé číslo, jsou řešením dané rovnice, předpokládejme tedy, že $xy \neq 0$ a upravujme rovnici:

$$\begin{aligned}
(x + y^2)(x^2 + y) &= (x + y)^3 \\
x^3 + xy + x^2y^2 + y^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
xy + x^2y^2 &= 3xy(x + y) \\
1 + xy &= 3(x + y) \\
1 - 3y &= x(3 - y) \\
x &= \frac{3y - 1}{y - 3} \qquad (y \neq 3) \\
x &= \frac{3(y - 3) + 8}{y - 3} = 3 + \frac{8}{y - 3}.
\end{aligned}$$

A jelikož je levá strana celé číslo, tak musí být celé číslo i pravá strana, tedy

$$(y-3)|8 \Rightarrow (y-3) \in \{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\} \Rightarrow y \in \{-5,-1,1,2,4,5,7,11\}.$$

Po dopočítání příslušných x ke každému y (a také ze symetrie zadání) dostáváme, že

$$(x,y) \in \{(t,0),(0,t),(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)|t \in \mathbb{Z}\}.$$

Úloha 6.3. Dlouho to netrvalo a kluci měli upletené pomlázky a mohli se vrátit domů za Liběnkou. Jaro bylo v plném proudu, tráva se zelenala a v ní se, hned vedle prvosenek, pásla prvočísla. „Taťko, koukej, tady je ale prvočísel! Já si myslím, že by se tady našla úplně všechna.“, zavolal Matěj nadšeně na Henryho. „To je hezké. A zvládneš mezi nimi najít všechna prvočísla p, pro která existují přirozená čísla n, x, y, taková, že $p^n = x^3+y^3$?“

Řešení. Hledejme **nejmenší** takové n_0, pro které platí $\exists x, y \in \mathbb{N} : p^n = x^3 + y^3$.

Rozdělíme si $x^3 + y^3$ na součin:

$$x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$$

Z tohoto rozkladu vidíme, že $(x+y)$ i (x^2-xy+y^2) musí být celočíselnými mocninami prvočísla p. Tedy existuje takové $k \in \mathbb{Z}$, že $(x+y) = p^k$ a zároveň $(x^2-xy+y^2) = p^{n_0-k}$. Jelikož x, y jsou celočíselná, musí platit $0 \le k \le n_0$.

Jelikož x, y jsou přirozená, tedy alespoň 1, platí $x + y \ge 2 > 1$, neboli $k \ne 0$.

Rozebereme si zvlášť případ, kdy $k = n_0$:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= p^{n_0-k} = p^0 = 1 \\ x^3 + y^3 &= (x+y) \cdot 1 \\ x^3 + y^3 &= x + y \\ x^3 - x + y^3 - y &= 0 \\ (x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož $x, y \ge 1$, tak x, $x+1$, y, $y+1$ jsou kladné a $(x-1)$, $(y-1)$ jsou nezáporné. Rovnost tedy může nastat pouze v případě, kdy $x = y = 1$, neboli $p_0^n = 1^3 + 1^3 = 2$, tedy $p = 2$. Z tohoto případu nám vyšlo jediné možné $p = 2$, kde hledaná čísla jsou např. $x = y = n = 1$.

Teď budeme uvažovat případ, kdy $1 \le k \le n_0 - 1$:

Z předpokladu platí, že $(x+y)$ i (x^2-xy+y^2) přirozenou mocninou prvočísla p, zejména tedy jsou dělitelné p.

Dostáváme $p|(x+y)$ a $p|(x^2-xy+y^2)$, tedy $p|((x+y)^2-(x^2-xy+y^2))$, neboli $p|3xy$.

1. $p|3$: Tedy $p = 1 \wedge p = 3$, ale 1 není prvočíslo, tedy vyšlo nám pouze jedno další prvočíslo $p = 3$, kde hledaná čísla jsou např. $x = 1, y = n = 2$.

2. $p|x$: Z tvrzení $p|(x+y)$ plyne, že pokud $p|x$, tak $p|y$.

   Čísla x, y si tedy můžeme zapsat ve tvaru $x = p \cdot x_1$, $y = p \cdot y_1$, kde $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^+$.

   Pak platí $p^n = x^3 + y^3 = (p \cdot x_1)^3 + (p \cdot y_1)^3 = p^3 \cdot (x_1^3 + y_1^3)$.

   Celou rovnici vydělíme p^3 a dostáváme $p^{n_0-3} = x_1 + y_1$.

   Vidíme, že $x_1 + y_1 \ge 2$, tedy $n_0 - 3 > 0$.

   Tímto ovšem dostáváme n', které je menší, než n_0 a platí pro něj stejná rovnice, což je ve sporu s tím, že jsme hledali nejmenší takové n_0, pro které daná rovnice platí (viz. 1. řádek důkazu).

3. $p|y$: Analogicky k 2. (záměnou x a y).

Jediná vyhovující p jsou 2, 3.

$$2^1 = 1^3 + 1^3$$
$$3^2 = 1^3 + 2^3$$

Úloha 6.4. Už byli skoro doma, když se Matěj začal trochu zdráhat. „A…je to vůbec přirozené, takhle mlátit holky?“, řekl se smutným pohledem. „Podívej se, existují taková přirozená $n, a \in \mathbb{N}$, pro něž existuje prvočíslo p splňující

$$2a^p p + a^p + np^n = anp^n + 2p + 1 \quad .$$

Když je všechny najdeš, tak budou přirozené i velikonoční zvyky.“

Řešení. Prvním krokem je si rovnici upravit na tvar

$$(2p+1)(a^p - 1) = (a-1)np^n. \quad (1)$$

Pokud je $a = 1$, tak jsou obě strany rovnice nulové. Jelikož jsme udělali zatím jen jednu ekvivalentní úpravu rovnice, tak každá trojice $(1, n, p)$ je řešením zadané rovnice.

Předpokládejme, že $a - 1$ je nenulové a vydělme tímto členem celou rovnici:

$$(2p+1)\frac{a^p - 1}{a - 1} = np^n.$$

Proč jsme to udělali? Víme, že $\frac{a^p-1}{a-1}$ je přirozené číslo pro každé $n, a \in \mathbb{N}$, $a > 1$, vždyť je to rovno $a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1$. Navíc p^n dělí obě strany rovnice a s číslem $2p + 1$ je nesoudělné, takže

$$p^n \mid \frac{a^p - 1}{a - 1}. \quad (2)$$

Zajímá nás zbytek po dělení čísla a číslem p. Kdo zná malou Fermatovu větu, tak snadno odvodí, že pokud $p \mid a^p - 1$, tak $p \mid a - 1$ (tedy zbytek je 1). S ostatníma to dokážeme elementárněji. Použijeme binomickou větu:

$$(a-1)^p = a^p - \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} - \cdots + \binom{p}{p-1}(-1)^{p-1}a + (-1)^p.$$

Předpokládejme také, že p je liché a tedy $(-1)^p = -1$. Případ $p = 2$ vyřešíme nakonec. Rozmyslete sami, proč je každý binomický koeficient dělitelný číslem p. Dostáváme pak, že pokud $p \mid a^p - 1$, tak $p \mid (a-1)^p$ a jelikož je p prvočíslo, tak $p \mid a - 1$. Vydělme a číslem p se zbytkem, který známe: $a = pk + 1$ a dosaďme do (2):

$$p^n \mid \frac{(pk+1)^p - 1}{pk}.$$

Opět využijme binomickou větu:

$$p^n \mid \frac{(pk)^p + \binom{p}{1}(pk)^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}pk + 1 - 1}{pk} = (pk)^{p-1} + \binom{p}{1}(pk)^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2}pk + p.$$

Nyní už snad vidíme v čem je problém. Každý sčítanec je dělitelný p^2 kromě posledního, protože $p > 2$. Celý výraz proto nemůže být dělitelný p^2 a proto $n = 1$. Dosaďme do (1):

$$(2p+1)(a^p - 1) = (a-1)p.$$

To je spor, protože $2p + 1 > p$ a $a^p - 1 > a - 1$.

Nakonec nám zbývá rozebrat případ $p = 2$. Dosadíme do (1):

$$5(a^2 - 1) = (a-1)n2^n.$$

$$5(a+1) = n2^n.$$

Vidíme, že 5 dělí n. Označme proto $n = 5k$:

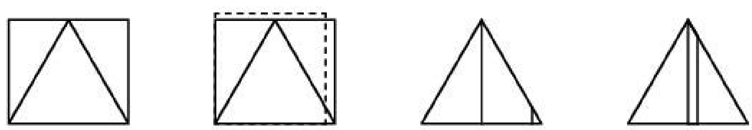
$$a = k2^k - 1.$$

Řešením zadané trojice jsou i $(k2^k - 1, 5, 5k)$.

Celkem jsou hledané dvojice (a, n) právě dvojice tvaru $(k2^k - 1, 5k)$, $k \in \mathbb{N}$ a $(1, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 6.A. Liběnka zatím doma nabarvila vajíčka a pracovala na výzdobě. V papírnictví si koupila dva stejně velké papírové rovnostranné trojúhelníky. Potom rozstřihla každý z nich na tři díly a z těchto šesti dílů poskládala čtverec, aniž by se některý z dílů překrýval nebo mezi nimi byla mezera. Dokážete to také? Liběnce hodně pomohlo, že si s trojúhelníky chvíli hrál také Matěj, který jeden z nich rozstřihl napůl a spolu s druhým sestavil obdélník. Stačí, když popíšete, kudy a v jaké vzdálenosti byste stříhání prováděli.

Řešení. Vyrobíme Matějův obdélník a ořízneme jej vhodným čtvercem jako na obrázku (chceme, aby obsah čtverce byl stejný jako obsah obdélníka, takový čtverec určitě existuje). Trojúhelníky pak lze rozstřihnout způsobem zobrazeným na obrázku.



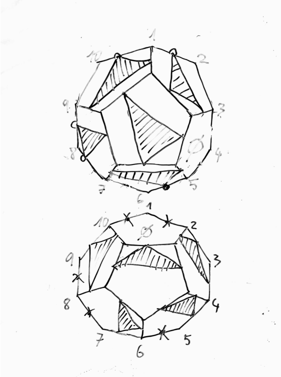
Ke straně obdélníka délky v tedy přidáváme x a ze strany délky v odečítáme x. Jednoduchým výpočtem proto

$$a - x = v + x \Rightarrow x = \frac{a-v}{2}$$

Úloha 6.B. Jaké překvapení čekalo Liběnku, když si na ni Henry připravil pomlázku ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu! Navíc měla tato zajímavá pomlázka pruty ležící ve stěnách spojující středy hran. Kolik nejvýše disjunktních trojúhelníků dokážeme z těchto prutů na dvanáctistěnu vytvořit? Samozřejmě bychom neradi Henryho pomlázku zničili, proto nebudeme pruty nijak lámat či jinak deformovat.

Řešení. Hledaný počet je deset. Pro důkaz musíme ukázat dvě věci. Jednak, že jich dokážeme sestrojit deset a jednak, že jich více sestrojit nelze.

Deset jich určitě sestrojit lze, např. podle tohoto schématu:



Více jich být nemůže, neboť dvanáctistěn má 30 hran. Kdyby měly trojúhelníky dohromady více než 30 vrcholů, z Dirichletova principu plyne, že by na nějaké hraně byly dva vrcholy. Oba by musely být na středu hrany, tudíž by střed hrany byl součástí více trojúhelníků. Potom by ale nebyly disjunktní. Trojúhelníky tedy mohou mát maximálně 30 vrcholů, takže lze sestrojit nejvýše deset trojúhelníků.

Úloha 6.C. A jak to tak bývá, Liběnka dostala výprask a i přes to měla pro kluky připravenou odměnu. A tou odměnou jim byl čokoládový konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Měl označený M průsečík jeho úhlopříček a K průsečík osy úhlu ACD s úsečkou BD. Dokažte že, čtyřúhelník $ABCK$ je tětivový právě tehdy, pokud platí $|MB||MD| = |MA||MC| + |MA||CD|$.

Řešení. Uvedené řešení je inspirované řešením Vítka Jelínka.

Z mocnosti bodu ke kružnici je čtyřúhelník $ABCK$ tětivový, právě když platí rovnost $|AM||MC| = |KM||MB|$. Rovnost ze zadání převedeme ekvivalentními úpravami k výše uvedené rovnosti. Využijeme k tomu věty o ose úhlu, podle které

$$\frac{|DK|}{|DC|} = \frac{|KM|}{|MC|}$$

Úpravy:

$$|MB||MD| = |MA||MC + |MA||CD|$$
$$|MB|(|DK| + |MK|) = |MA||MC + |MA||CD|$$
$$|MB|(\frac{|DC||KM|}{|MC|} + |MK|) = |MA|(|MC + |CD|)$$
$$|MB||MK|(\frac{|DC|}{|MC|} + 1) = |MA|(|MC + |CD|$$
$$|MB||MK|\frac{|DC||MC|}{|MC|} = |MA|(|MC + |CD|)$$
$$|MB||MK| = |MA||MC|$$

Za předpokladu, že čtyřúhelník $ABCD$ není nijak degradovaný jsou uvedené úpravy ekvivalentní, proto je čtyřúhelník $ABCK|$ tětivový, právě když $|MB||MD| = |MA||MC|+ |MA||CD|$.

BRKOS Team 2018