Řešení 5. série

Šachovnice

Úloha 5.1. Byla zima a nad šachovnicí se začínalo stmívat. Na věži se tvořily rampouchy a král s královnou už vymýšleli strategii pro další den. Šemík zaržál, což královi vnuklo otázku: Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení šachovnice 8×8 tak, aby se král nikdy neposunul z pole na pole o stejné barvě (tj. aby pole sousedící hranou nebo rohem měla jinou barvu)?

Řešení. Najprv ukážeme, že menej ako štyrmi farbami šachovnicu ofarbiť nevieme. V ľubovoľnom štvorci políčok 2×2 musia byť všetky štyri políčka inej farby. Pokiaľ by existovali dve políčka rovnakej farby, majú spoločný roh (alebo dokonca hranu), takže figurka kráľa môže prejsť z jedného políčka na druhé. Preto potrebujeme aspoň štyri farby.

Potom ak `A`, `B`, `C`, `D` sú rôzne farby, šachovnicu 8×8 ofarbíme nasledovne:

A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D

Zjavne, každé dve políčka so spoločným rohom majú rôznu farbu.

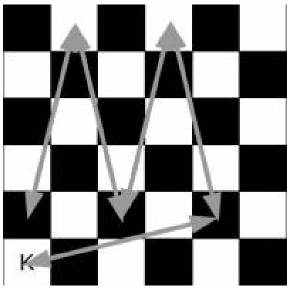
Úloha 5.2. „Ale Karle," poznamenala královna, „jsi nachlazený a nemůžeš si skákat po šachovnici. Co kdybychom se zamysleli spíše nad tím, kteří zobecnění koně nás mohou dostat po několika skocích na libovolné pole na světě." Normální kůň 2×1 skáče dva dopředu a jeden stranou. Zobecnění koně $n \times 1$ skáčí o n dopředu a o jeden stranou. Nalezněte tedy všechna taková n, pro která se mohou zobecnění koně $n \times 1$ dostat na libovolné pole nekonečné šachovnice.

Řešení. Pokud je n liché, udělá kůň při každém skoku sudý počet $(n+1)$ přesunů na sousední pole. Vždycky proto doskočí na pole stejné barvy (v klasickém obarvení šachovnice), takže se kůň nedostane na pole jiné barvy.

Pokud je n sudé, může kůň skočit ze souřadnice $[0,0]$ na souřadnici $[n,1]$. Poté skočí $\frac{n}{2}$ krát o $(-1,n)$ a $\frac{n}{2}$ krát o $(-1,-n)$. Skončí tedy na poli $[n+n\cdot(-1), 1+\frac{n}{2}\cdot(n)+\frac{n}{2}\cdot(-n)] = [0,1]$. Analogicky se můžeme dostat na pole $[0,-1]$, $[1,0]$ a $[-1,0]$. Když se dostaneme na tato pole, jejich kombinacemi pak pokryjeme libovolné pole šachovnice.

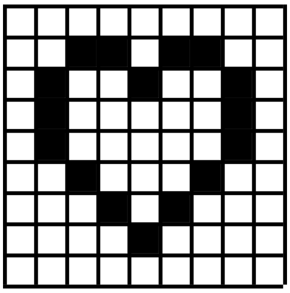
BRKOS Team 2018

Zde je příklad pro $n = 4$:

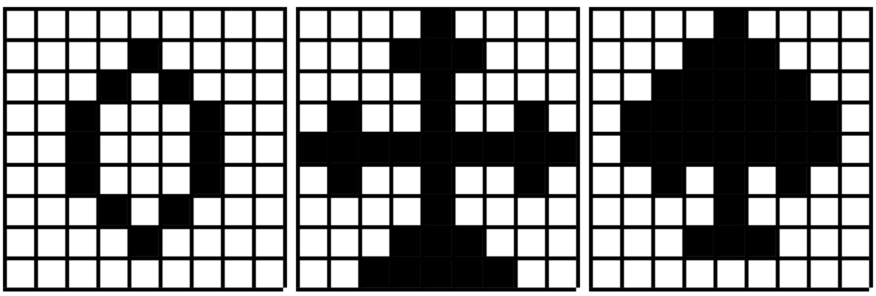


Kůň tedy dokáže přeskákat kamkoli právě pro sudá n.

Úloha 5.3. „Libuško, to jsme už řešili mnohokrát. Nového koně ti koupím, až vyhrajeme nějakou válku. Královská pokladnice je teď prázdná.“, povzdechnul si král a rozhlédl se po poli. „Ale koukej, protože tě mám rád, nakreslil jsem ti na naši krásnou šachovnici 9×9 černo-bílé srdíčko“:



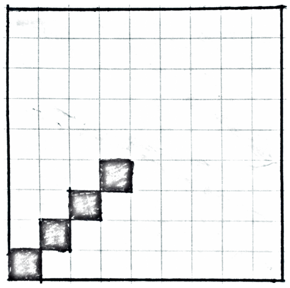
„A mám pro tebe úkol! Můžeš prohazovat řádky, prohazovat sloupce, vzít kopii jednoho řádku a přiložit ho na sousední, takže vznikne políčko po políčku kombinace (černá a černá $\rightarrow$ bílá, černá a bílá $\rightarrow$ černá, bílá a bílá $\rightarrow$ bílá) a to stejné se sloupečky. Na které z těchto 3 symbolů dokážeš takto srdíčko překreslit?“ a ukázal jí tyto varianty:



Řešení. Úvodní pozorování: Všechny operace jsou invertibilní. To znamená, že ať uděláme cokoliv, existuje posloupnost operací, která vrátí obrázek do původního stavu. Dále vhodnou kompozicí operací umíme docílit toho, že umíme přiložit jakýkoliv řádek/sloupec k jinému řádku/sloupci (nejprve prohodíme řádek/sloupec tak, že bude sousedit s řádkem/sloupcem, který chceme přikládat, přiložíme, a prohodíme zpět).

Pokud budeme mít zajištěno, že dva obrázky na sebe lze převést, nalezení příslušného převedení je potom banalita. Ukážeme tedy obecně, kdy to jde a kdy ne. K tomu použijeme invariant “délka generující diagonály”.

Diagonála je obrázek tvaru:

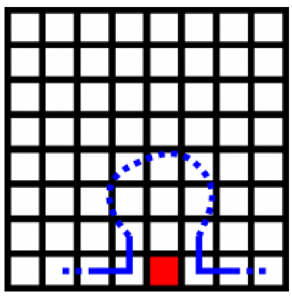


a její délka je počet černých čtverečků.

Je vidět, že uvedenými pravidly se nám nepodaří převést na sebe diagonály různých délek. K řešení úlohy si nyní stačí uvědomit, že ze symbolů lze vyrobit diagonály délek: $\heartsuit - 4$, $\diamondsuit - 3$, $\clubsuit - 5$, $\spadesuit - 4$. S připomenutím toho, že operace jsou invertibilní, je nyní jasné, že lze vyrobit pouze piky.

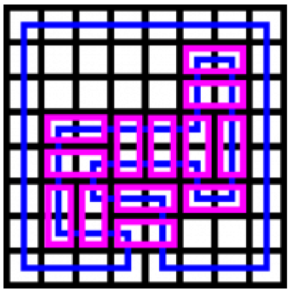
Úloha 5.4. Libuška se zamyslela, ale brzy se vrátila k původnímu tématu. „To je od tebe milé, Karle, ale možnost vyhrát válku budeš mít velmi brzy – zrovna včera jsem vyhlásila válku sousednímu království. A kromě toho, ty peníze z královské pokladnice vůbec nepřišly na zmar. Koupila jsem nový kanon KX UltraSmart 3000, který se po šachovnici dokáže pohybovat o jedno pole nahoru, dolu, doprava či doleva. Jenom jedno mi teď vrtá hlavou. Řekli mi, že pokud existuje cesta kanonem na šachovnici 8×8 taková, že navštíví každé políčko právě jednou (kromě prvního, na které se nakonec vrátí) a že kanon udělá stejný počet horizontálních (doprava a doleva) a vertikálních (nahoru a dolu) pohybů, pak dostanu ještě jeden kanon zcela zdarma. Mám na něj nárok?“

Řešení. Libovolná uzavřená cesta musí fungovat tak, že pokud opustí hranici šachovnice, pak se na ni vrátí hned na vedlejším hraničním políčku. Jinak by totiž tato cesta zabránila pokrytí políčka jak si lze snadno rozmyslet z obrázku (červeně označeno políčko, jenž by nebylo možné projít).



Všechny uzavřené cesty tak můžeme vystavět od hranice. Začneme tedy s uzavřenou cestou po okraji (ta tedy nevjede do vnitřního 6×6 čtverce). Nyní vystavíme jednu část cesty která opouští hranici na jednom políčku a vrací se na sousedním. Cestu budeme stavět tak, že vybereme 2 sousední políčka vedle kterých vede už aktuálně vystavěná část cesty (tedy máme 2 políčka kde z jednoho do druhého vede část cesty a vedle nich 2 políčka, kterými zatím žádná cesta nevede). Pak můžeme stávající cestu rozšířit na tato 2 políčka výhybkou, kterou zaznačíme dominem na tato 2 nová políčka.

Pro lepší ilustraci zde máme obrázek se zaznačenými dominy pro jeden takový úsek cesty:

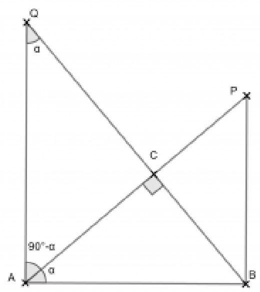


Nyní tedy celou uzavřenou cestu máme representovanou pokrytím dominy vnitřního 6×6 čtverce. Zároveň si uvědomme, že přidáním horizontálního domina jsme ubrali jeden horizontální pohyb (mezi původními čtverci) a nahradili ho 2 vertikálními pohyby a jedním horizontálním. Začali jsme přitom s cestou na hranici, která má 14 horizontálních a 14 vertikálních pohybů. Pokud by tedy existovala cesta, která splňuje zadání, pak by muselo existovat dláždění čtverce 6×6 dominy se stejným počtem horizontálních a vertikálních domin. To je ale spor s úlohou z pomocného textu.

Zjistili jsme tedy, že Libuška na další kanón nárok nemá, neboť taková cesta kanonem neexistuje (což nás vůbec nepřekvapuje, neboť reklamní kampaně mají většinou nějaký háček).

Úloha 5.A. Nad šachovnicí létali ptáčci a tryskáče, které dělaly v oblacích přímky a úsečky. Vypadalo to asi takto: Úsečka AB, $|AB| = 1$ a dvě kolmice na tuto úsečku a, b, $A \in a$, $B \in b$. Bodem A (B) vedly přímky p (q) tak, že p byla kolmá na q a obě byly různoběžné s a, b. Označme P průsečík p,b a Q průsečík q,a. Dokažte, že $|AQ| \cdot |BP| = 1$.

Řešení. Řešení Vítka Jelínka:



Označme C průsečík přímek AP a BQ a α velikost úhlu $\sphericalangle AQC$. Pak z dopočtu velikostí úhlů v trojúhelníku AQC dostáváme, že $|\sphericalangle QAC| = 90° - \alpha$ a jelikož $\sphericalangle QAB$ je pravý, tak $|\sphericalangle PAB| = \alpha$. Tím pádem trojúhelníky QAB a ABP jsou podobné podle věty uu (oba mají jeden pravý úhel a jeden úhel velikosti α). Z toho plyne:

$$\frac{|AQ|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BP|} \Rightarrow |AQ| \cdot |BP| = |AB|^2 = 1^2 = 1,$$

což jsme chtěli ukázat.

Úloha 5.B. Jeden z ptáčků si zpíval: „Pí pí, znám všechna reálná čísla c taková, že pro libovolné kladné reálné x platí $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > c$.“ Nalezněte největší takové c.

Řešení. Jelikož ve funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s předpisem $f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ jsou x pouze ve druhé mocnině, tipneme si, že jediné minimum funkce f bude pro $x = 0$, přičemž $f(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Samozřejmě tvrzení, že $f(0)$ je minimum funkce musíme dokázat. V tomto mají výhodu ti, kteří umějí (správně) derivovat, ale šlo to i jinými, poměrně jednoduchými způsoby.

Takový základní způsob je, že ukážeme, že pro všechna ostatní x (tedy různá od 0) platí $f(x) > f(0)$.

$$
\begin{array}{rcll}
f(x) & > & f(0) & \\
\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} & > & \frac{3\sqrt{2}}{2} & / \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+2} > 0 \quad (1) \\
\sqrt{2} \cdot (x^2+3) & > & 3 \cdot \sqrt{x^2+2} & /()^2 \quad (2) \\
2(x^2+3)^2 & > & 9(x^2+2) & \\
2(x^4+6x^2+9) - 9(x^2+2) & > & 0 & \\
2x^4+12x^2+18-9x^2-18 & > & 0 & \\
2x^4+3x^2 & > & 0 & \\
(2x^2+3) \cdot x^2 & > & 0 &
\end{array}
$$

Zřejmě $2x^2 + 3 > 0$. Taky víme, že $x^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze při $x = 0$. Tedy pro $x \neq 0$ platí $(2x^2 + 3) \cdot x^2 > 0$.

Musíme zdůraznit, že rovnici (1) násobíme **kladným** číslem nezávisle na x. Stejně tak musíme zdůraznit, že rovnice (2) má obě strany větší než 0. Díky těmto omezením jsou všechny úpravy ekvivalentní.

Tedy jsme dokázali, že $f(x) > f(0)$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Potom jelikož funkce f je spojitá a $f(0)$ je jediné minimum této funkce, tak $f(0)$ je největší takové číslo, které je menší než kterékoliv číslo z $\left\{\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}},\ x \in \mathbb{R}^+\right\}$. A tedy hledané číslo je $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Úloha 5.C. Mezitím v tryskáči měl jeden pán reálné polynomy. Polynom $P(x)$ stupně n s n různými reálnými kořeny. Pomozte pánovi najít všechny rostoucí polynomy $R(x)$ stupně nejvýše $n - 1$ splňující $R(P(x) + x) = P(R(x)) + R(x)$.

Řešení. Uvažme množinu M všech kořenů P. Pak pro libovolné $k \in M$ dostaneme dosazením do rovnosti:

$$
\begin{aligned}
R(P(k) + k) &= P(R(k)) + R(k) \\
R(k) &= P(R(k)) + R(k) \\
P(R(k)) &= 0
\end{aligned}
$$

Tedy $R(k)$ je kořen P. Nyní ukážeme dokonce, že $R(k) = k$.

Z monotonie R vyplývá především, že $R(x)$ je prosté. Díky tomu pro $k_1 \neq k_2 \in M$ platí $R(k_1) \neq R(k_2)$. R tedy funguje na M jako permutace.

Z monotonie R na $\mathbb{R}$ ovšem vyplývá monotonie R na M. Jediná monotonní permutace je však identita, tedy $k \in M, R(k) = k$.

Nyní využijeme základní větu algebry, podle které je polynom stupně nejvýše $n - 1$ jednoznačně zadán hodnotami v n bodech.

Zjevně $R(x) = x$ splňuje, a je to tedy jediné řešení.