Řešení 4. série

Výroková logika

Úloha 4.1. Liběnka, jakožto vedoucí klubu matematiků s pravým palcem u nohy větším než levý, organizuje pro tento klub sraz. Na něj pozvala Koumu, Ňoumu, Henryho a Matěje. Kouma přijde na sraz, jen když přijde Ňouma. Henry a Ňouma nepřijdou současně, ale přijde alespoň jeden z nich. Nakonec, nemůže se stát, že by na srazu byli současně Kouma, Henry a Matěj. Určete všechny možné kombinace, jak může vypadat účast na srazu.

Řešení. Ve výrokové logice je jedna z nejsilnějších zbraní pravdivostní tabulka. Přepíšeme si podmínky na výroky:

(1) Kouma přijde jen, když přijde Ňouma: $\neg N \Rightarrow \neg K$ (nebo $K \Rightarrow N$)

(2) Henry a Ňouma nepřijdou současně, ale přijde alespoň jeden z nich: $H \Leftrightarrow \neg N$

(3) Kouma, Henry a Matěj nepřijdou současně $\neg(K \wedge H \wedge M)$

Kouma	Ňouma	Henry	Matěj	(1)	(2)	(3)	všechny podmínky
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0

Všimněme si, že třetí podmínka výsledek vůbec nezměnila. K tomu, že je nepodstatná, lze dojít i logickými úvahami.

Vidíme tedy, že podmínkám vyhovují kombinace KŇM, KŇ, ŇM, Ň, HM, H.

Úloha 4.2. Kouma přemýšlel, zda se srazu zúčastnit. Hlavním aspektem rozhodnutí však nebyl výsledek předchozí úlohy, ale fakt, že by nechal doma samotnou binární spojku Θ s následující pravdivostní tabulkou:

A	B	$\Theta(A, B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

"Nenechávej mě tu samotnou, když tu zůstaneš, vytvořím ti jakoukoli výrokovou formuli si budeš přát!"vzlykala binární spojka. "Dobře, vytvoř mi tedy formuli, která je ekvivalentní s formulí $C \rightarrow (A \wedge B)$."Napište také výrokovou formuli, která je pravdivá právě tehdy, když je pravdivá $C \rightarrow (A \wedge B)$ a obsahuje jen binární spojku Θ (ne nutně jednou), výrokové proměnné a závorky.

Řešení. Dokážeme, že vyhoví výraz $\Theta(C, \Theta(A, B))$. Pro důkaz stačí v pravdivostní tabulce ukázat, že ve všech případech mají tyto výrazy stejnou pravdivostní hodnotu.

A	B	C	$A \wedge B$	$C \rightarrow (A \wedge B)$	$\Theta(A, B)$	$\Theta(C, \Theta(A, B))$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Z tabulky jasně vidíme, že tyto výrazy jsou ekvivalentní.

Ještě si ukážeme postup, jak se můžeme k takovému řešení dopracovat (toto už není součástí důkazu):

Někteří z vás si všimli, že spojka Θ odpovídá spojce NAND, tedy negaci spojky AND. Budeme se tedy snažit výraz ze zadání upravit na výraz, který bude obsahovat pouze negaci a spojku AND.

$(C \rightarrow (A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg C \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow \neg(C \wedge \neg(A \wedge B))$

Teď už nám stačí jednoduše upravit, neboť platí: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \Theta(A, B)$ a zároveň $\neg(C \wedge \Theta(A, B)) \Leftrightarrow \Theta(C, \Theta(A, B))$, a tedy $(C \rightarrow (A \wedge B)) \Leftrightarrow \neg(C \wedge \neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow \Theta(C, \Theta(A, B))$.

Úloha 4.3. Sraz probíhal jako obvykle. Mezi poměřováním ostatních končetin se však na programu objevila položka navíc - Liběnčina soutěž: Najděte co nejkratší výrokovou formuli obsahující pět výrokových proměnných A, B, C, D, E, která je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý právě sudý počet proměnných. Koumovi (ať už na srazu byl nebo ne) se podařilo nalézt formuli, která má 20 znaků (tzn. proměnná, operátor nebo závorka). Podaří se vám najít ještě kratší? Ve formuli smíte používat pouze výrokové proměnné, závorky a libovolné unární nebo binární logické spojky.

Řešení. Základními kameny naší formule budou ekvivalence $X \Leftrightarrow Y$, které platí právě tehdy, když platí sudý počet proměnných v nich. Ukážeme si, že zadání vyhoví např. formule $((A \Leftrightarrow B) XOR (C \Leftrightarrow D)) \Leftrightarrow E$. Po pozorném prohlédnutí zjistíme, jaké jsou možnosti, aby byla formule pravdivá: Buď bude E mít hodnotu 1, v tom případě chceme, aby XOR byl také 1, proto právě jedna ze závorek bude 1. To ale znamená, že v právě jedné závorce budou mít proměnné různé hodnoty, tedy lichý počet proměnných v závorkách má hodnotu 1. Spolu s E je jich je pak sudý počet.

Naopak pokud E má hodnotu 0, pak chceme mít i XOR 0, tedy obě závorky budou mít současně hodnotu buď 1 – proměnné A a B mají stejnou hodnotu a C a D mají stejnou hodnotu, pak je sudý počet proměnných s hodnotou 1, nebo obě závorky budou současně 0 – tedy A a B jsou různé a C a D jsou různé, pak opět máme sudý počet proměnných s hodnotou 1. Jestliže XOR označíme symbolem $\otimes$, výsledná formule
$((A \Leftrightarrow B) \otimes (C \Leftrightarrow D)) \Leftrightarrow E$ má pak 15 znaků.

Úloha 4.4. Když Kouma soutěž vyhrál, snažil se přednést předem připravenou děkovnou řeč. Avšak ještě než začal, pozornost strhla Ňoumova unikátní ternární spojka Δ, kterou si vycvičil, aby byla pravdivá právě tehdy, když jsou pravdivé dva ze tří jejích argumentů. Ňouma hned předvedl pár příkladů: $\Delta(1,0,0) = \Delta(1,1,1) = 0$, $\Delta(1,0,1) = \Delta(1,1,0) = 1$. “Tahle spojka umí všechno, s její pomocí jsem schopný zapsat každou formuli výrokové logiky!"Kouma se zamyslel a odpověděl: “To není pravda! Musíš ke své spojce pridat negaci.” Dokažte, že má Kouma pravdu. Nalezněte výrokovou formuli, která se nedá zapsat jen pomocí spojky Δ a dokažte, že každá formula se dá zapsat jen pomocí spojky Δ a negace $\neg$. Při důkazu můžete využít plnohodnotnost systémů uvedených v pomocném textu.

Řešení. Najprv ukážem, že samotná spojka Δ netvorí plnohodnotný systém. Nech A je ľubovoľná výroková premenná. Dokážem, že neexistuje formula obsahujúca iba výrokové premenné a logickú spojku Δ, ktorá by bola ekvivalentná formuli $\neg A$. Uvážme takú valuáciu premenných v, ktorá každej premennej priradí hodnotu 0. Formula $\neg A$ je pri takejto valuácii v pravdivá. Indukciou ukážem, že každá formula obsahujúca iba výrokové premenné a spojku Δ sa pri takejto valuácii v vyhodnotí na nepravdivú.

Indukciu vediem vzhľadom k štruktúre formule ϕ.

- $\phi \equiv X$, kde X je ľubovoľná výroková premenná. Potom z definície valuácie plynie $v(\phi) = v(X) = 0$.
- $\phi \equiv \Delta(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, kde ψ_i sú formule so štruktúrou jednoduchšou ako ϕ. Preto z indukčného predpokladu vieme $v(\psi_1) = v(\psi_2) = v(\psi_3) = 0$. Potom z definície spojky Δ vyplýva $v(\phi) = v(\Delta(\psi_1, \psi_2, \psi_3)) = v(\Delta(0,0,0)) = 0$. Tým je indukčný krok dokázaný.

Tým sme dokázali, že každá formula má pri danej valuácii v hodnotu 0. Preto neexistuje formula ekvivalentná $\neg A$. Z toho plynie, že pomocou spojky Δ nie sme schopní popísať všetky výrokové formule, teda netvorí plnohodnotný systém.

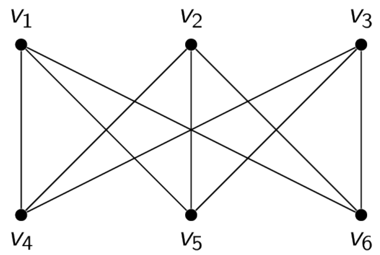
Ďalej ukážem, že spojky Δ a $\neg$ tvoria plnohodnotný systém. Na to nám stačí spojky nejakého plnohodnotného systému zapísať pomocou negácie a Δ. Ukážeme, ako spojky $\wedge$ a $\neg$ zapísať pomocou Δ a $\neg$.

Triviálne, spojku $\neg$ zapíšeme ako spojku $\neg$.

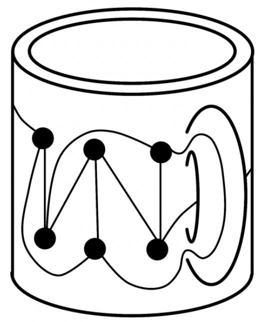
Než zapíšeme spojku $\wedge$, tak si všimneme, že formula $\Delta(A, A, A)$ je pre ľubovoľnú premennú A a ľubovoľnú valuáciu premenných nepravdivá, a teda je to kontradikcia. Potom formula $\Delta(A, B, \Delta(A, A, A))$ je pravdivá práve vtedy, keď sú pravdivé zároveň A a B. Preto formula $A \wedge B$ je ekvivalentná formuly $\Delta(A, B, \Delta(A, A, A))$.

Keďže spojky $\wedge, \neg$ tvoria plnohodnotný systém a spojku $\wedge$ vieme zapísať pomocou spojky Δ, tak $\Delta, \neg$ tvoria plnohodnotný systém.

Úloha 4.A. Ňouma se hned urazil, nabral hrnkem sýrovou omáčku a polil jím Koumu. Kouma se však nebránil a jen sýrově poznamenal: "Podívej, na hrnku je šest fleků sýrové omáčky spojených tak, že tři fleky jsou spojeny s dalšími třemi a přesto se čáry ani trochu nekříží.""To je toho, takhle jde spojit každých šest fleků na hrníčku."Odvětil Ňouma. Ukažte, jak lze na obyčejném hrnku s jedním uchem spojit šest bodů jako na obrázku, ale tak, aby se spojnice nekřížily.



Řešení. Bylo třeba použít ucha jako mostu. Výsledek mohl vypadat takto:

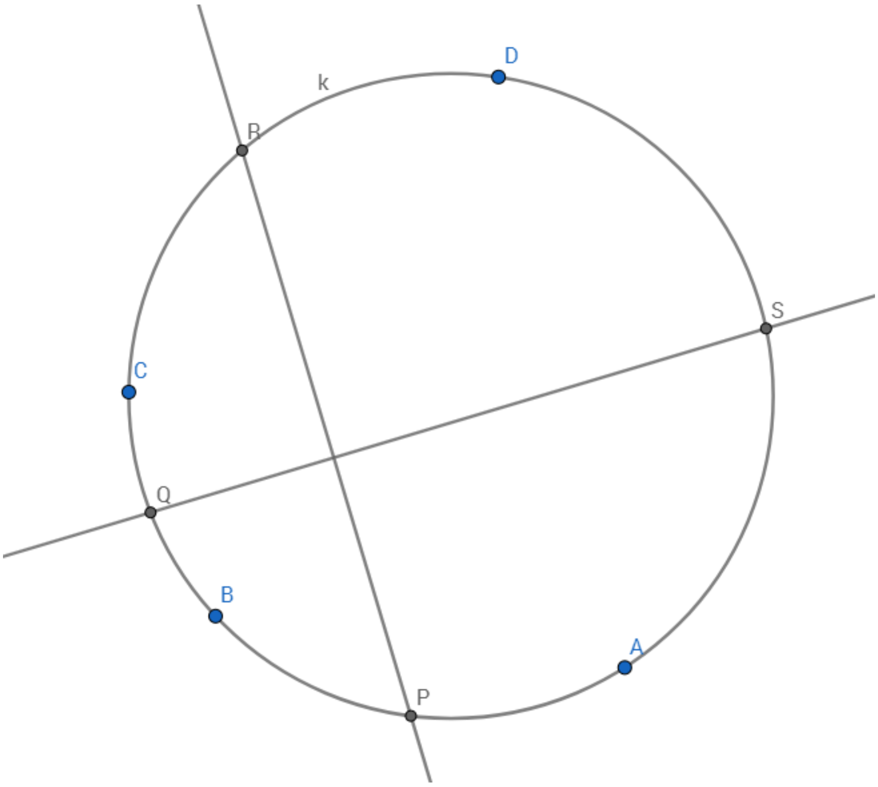


Úloha 4.B. Mezitím, co si ostatní otírali o koumu nachos, v jiné časové linii krále zaklela čarodějnice, že on a všichni jeho synové budou buď bezdětní, nebo budou mít právě 2 syny. O mnoho let později tato dynastie vymřela. Dohromady v této dynastii bylo 101 mužů (včetně krále). Kolik z nich bylo bezdětných?

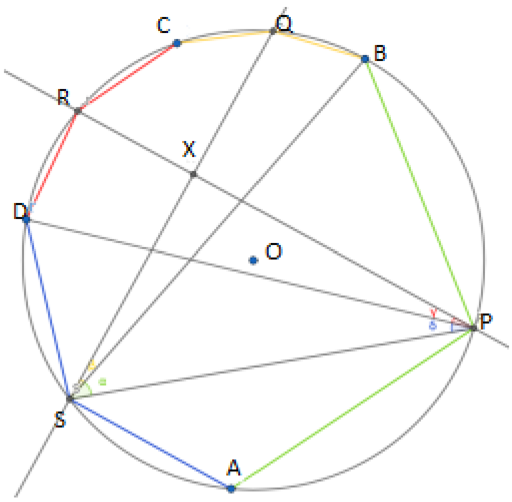
Řešení. Každý muž je buď otec, nebo bezdětný. Jelikož má každý otec dva syny, pak je počet otců roven počtu synů lomeno dvěma.

Každý muž kromě krále je syn. Proto počet synů je 100, počet otců 50 a počet bezdětných 51.

Úloha 4.C. Viděl v nich totiž kružnici k a na ní postupně body A, B, C, D. My si však označme postupně P, Q, R, S středy oblouků AB, BC, CD, DA. Dokažte, že PR je kolmé na QS.



Řešení.



Označme si O střed kružnice a X průsečík přímek PR a QS. Jelikož P, Q, R, S jsou středy úseků, víme, že $|AP| = |BP|$, $|BQ| = |CQ|$, $|CR| = |RD|$, $|DS| = |AS|$. Označme si velikosti obvodových úhlů odpovídajících jednotlivým úsekům α pro AP, β pro BQ, γ pro CR a δ pro DS. Jelikož středový úhel je dvojnásobek obvodového, můžeme vidět, že $4\alpha + 4\beta + 4\gamma + 4\delta = 360°$, tedy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 90°$.

Nyní se podíváme například na trojúhelník PXS. Úhel SPR je součet úhlů SPD a DPR, což je $\delta + \gamma$. Dále úhel PSQ je součet úhlů PSB a BSQ, což je $\alpha + \beta$. Úhel SXP se proto rovná

$$180° - (\delta + \gamma) - (\alpha + \beta) = 180° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180° - 90° = 90°.$$

BRKOS Team 2018

Tedy přímky PR a QS jsou na sebe kolmé.

Pomocný text, další informace o semináři najdete na stránkách brkos.math.muni.cz

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno
nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`