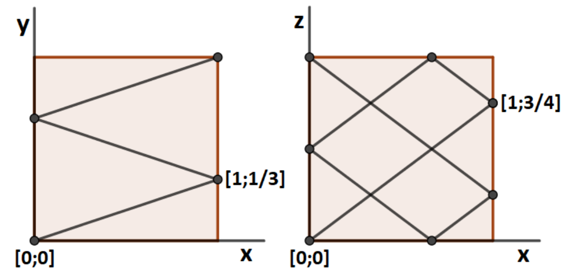
Řešení 3. série

Hrátky s tělesy

Úloha 3.1. Liběnka, protože je parádnice, si vzala krychli s hranou 1 vyrobenou ze zrcadel a položila ji hranami na souřadnicové osy. Matěj ji sledoval a lstivě jí v rohu se souřadnicemi $(0,0,0)$ vyvrtal bodovou díru a posvítil do ní laserovým ukazovátkem tak, že se poprvé paprsek odrazil v bodě $(1, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$. Kolikrát se celkově v krychli paprsek poodrážel než vyletěl tou samou dírou ven? Pokud paprsek vletěl přesně do rohu, jedním odrazem se odrazil zpět a pokud do hrany, odrazil se jedním odrazem jako od přímky.

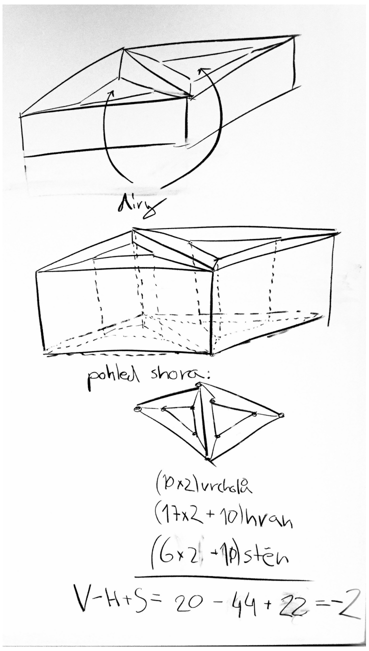
Řešení. Úlohu si rozdělíme do dvou 2D případů, a to pohledy na rovinu xy a na rovinu xz. V rovině xy se paprsek odrazí 5 krát, poté se ocitne opět v počátku xy a za tuto dráhu, pokud nebereme v úvahu y složku pohybu, prosvítí čtverec od strany k protější straně 6 krát. Analogicky pro rovinu xz se paprsek musí odrazit 11 krát, poté je v počátku xz a za tuto dráhu pouze x složka pohybu prosvítí čtverec od hrany k hraně 8 krát. Aby se paprsek dostal do počátku krychle, musí v obou pohledech urazit stejnou vzdálenost v jejich společné ose, tedy ve směru osy x (oněch dříve zmíněných 6 krát a 8 krát). Nabízí se tedy nejmenší společný násobek čísel 6 a 8, což je 24. Dále si všimneme, že všechny odrazy v xy jsou taktéž obsaženy v xz, stačí tedy spočítat, kolik je odrazů v xz. V xz se odrazí 12 krát ($11 + 1$ odraz od hrany), a poté znova a znova, dokud neurazí 24 délek ve směru osy x, tedy třikrát dokola, tedy $12 + 12 + 11$ (při posledním cyklu se již neodrazí od hrany, ale vyletí ven počátkem. Celkem se paprsek odrazí 35 krát.



Úloha 3.2. Henry hledal nekonvexní mnohostěn, jehož stěny jsou tvořeny čtyřúhelníky a pro který platí $V - H + S = -2$ (V je počet vrcholů, H je počet hran a S je počet stěn mnohostěnu). Pomozte mu s hledáním.

Řešení. Eulerova charakteristika všech klasických konvexních těles je vždy $V - H + S = 2$ (toto je docela netriviální poznatek). Pro nalezení tělesa s charakteristikou -2 proto zapátráme po světě nekonvexních (a možná lehce netradičních) útvarů, konkrétně útvarů s „dírami“. Zjednodušeně řečeno, každá díra v tělese snižuje charakteristiku o 2, proto hledané těleso bude mít v sobě dvě díry. Teď už si stačí jen trochu pohrát, abychom nalezli těleso složené z čtyřúhleníků (ale opět, vztah $V - H + S = -2$ platí pro libovolné jiné těleso s dvěmi dírami, složené z konverxních n-úhelníků). Mimo jiné i touto problematikou se zabývá matematická disciplína zvaná Topologie.

BRKOS Team 2018

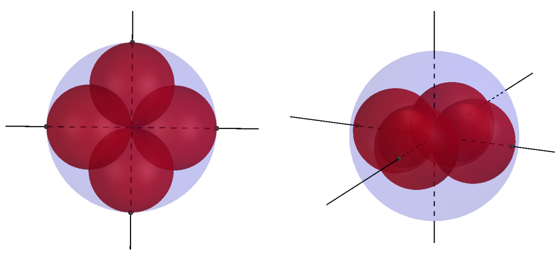


Úloha 3.3. Kouma a Ňouma si hráli s míčem tvaru koule koule K s poloměrem r a středem S. Když už je fotbal nebavil, tak kouli opsali hranol bez podstav (nekonečně vysoký hranol) tak, že jeho stěny byly na sebe kolmé. Každá stěna hranolu měla právě jeden společný bod s koulí. Nalezněte objem prostoru, který takto zobrazili, vně kvádru do koule v kulové inverzi podle koule K. $|SX| : |SA| = |SA| : |SX'|$ (Všechny body leží na jedné polopřímce s počátkem v S, A leží na povrchu koule, X je vzory bodu, X' obraz).

Řešení. Nejdříve se podíváme, na co se zobrazí jednotlivé stěny. Poloprostor, který se koule dotýká právě v jednom bodě (a neobsahuje onu kouli) se zobrazí na kouli, která prochází středem původní velké koule, bodem dotyku původní koule s rovinou a její průměr je poloměr původní koule. Takto zobrazíme všechny 4 poloroviny do 4 koulí, které se v určitých částech překrývají. V případě našeho nekonečně vysokého hranolu se prostor vně zobrazí do téhož, jen body v průniku sousedních dvou koulí nesmíme počítat dvakrát.

Průnikem dvou sousedních koulí je útvar složený ze dvou stejných kulových úsečí. Takové útvary jsou v obrazu 4, tedy celkem 8 kulových úsečí je průnikem 4 koulí obrazu prostoru vně hranolu bez podstav. Objem hledaného tělesa tedy získáme tak, že odečteme 8 krát objem úseče od 4 krát objemu koule o průměru r (poloměr původní).

Objem úseče je podle vzorce $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot v \cdot (3R^2 + v^2)$, kde v je výška úseče $v = \frac{(2-\sqrt{2})r}{4}$ a R je poloměr podstavy úseče $R = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{4}$, po dosazení do vzorce vyjde objem úseče $\frac{(8-5\cdot\sqrt{2})\cdot\pi\cdot r^3}{96}$. Nyní jen odečteme osminásobek objemu výseče od objemu čtyř koulí o poloměru $\frac{r}{2}$, výraz upravíme a výsledkem je $\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot r^3}{12}$.



Úloha 3.4. Kdesi v Hloupětíně ležel obecný čtyřstěn a byly dány 3 přímky v prostoru tak, že každá z nich byla rovnoběžná s jednou z hran čtyřstěnu, které měly společný vrchol a zároveň hrany čtyřstěnu neležely na těchto přímkách. Henry jednou popsal těžiště čtyřstěnu jako průsečík nějakých přímek, mohl při tom tvořit nové přímky pouze tak, že vedly některou dvojicí bodů z následujícího výčtu: Vrcholy čtyřstěnu, průsečík dvou již existujících přímek, obecný bod na libovolné přímce, obecný bod prostoru. Zvládnete to také?

Řešení. Označme čtyřstěn jako $ABCS$ s tím, že společný vrchol hran ze zadání je vrchol S.

Uvažme hranu AS a najděme její střed. Na rovnoběžce k AS zvolme libovolné dva body X, Y, ideálně tak, aby A, S, Y, X netvořily rovnoběžník, nýbrž lichoběžník. Pokud bychom se strefili do rovnoběžníku, BÚNO posuneme bod X o kousek vedle. Sestrojme průsečík úhlopříček tohoto lichoběžníku a označme ho U. Průsečík přímek AY a SX označme P. Bod V, průsečík přímek PU a AS je střed úsečky AS. K důkazu si představme příčku MN lichoběžníku procházející průsečíkem úhlopříček a podívejme se na podobné trojúhelníky YMU s YAS a XUN s XAS, zejména na poměry mezi odpovídajícími si stranami a výškami. Všimněme si hlavně, že výšky malých trojúhelníků na strany rovnoběžné s podstavami lichoběžníku jsou stejné. Z podobností a poměrů se snadno ukáže, že$|MU| = |UN|$. Dále se podívejme na podobné trojúhelníky PMU s PAV a PUN s PVS, z podobnosti a $|MU| = |UN|$ plyne $|AV| = |VS|$.

Takto sestrojme střed každé hrany, u které se nachází rovnoběžka. Spojením s protějším vrcholem na každé straně sestrojíme těžiště každé ze tří stěn obsahujících bod S. Středy zbývajících hran získáme spojením S s těmito těžišti, nakonec tedy sestrojíme i těžiště zbývající stěny. Každé těžiště spojíme s protějším vrcholem, průsečík bude těžiště celého čtyřstěnu.

To, že se těžnice (spojnice těžišť stěn a protějších vrcholů) protínají v jediném bodě, se dá dokázat podobným způsobem jako u těžnic trojúhelníku.

Úloha 3.A. Liběnka s Matějem hrají piškvorky na ploše 3×3. Trochu popletli pravidla, a to tak, že oba dva hrají za ten samý znak a ten, komu se jako prvnímu podaří udělat 3 znaky v řadě prohrává. Který z hráčů má vítěznou strategii a jaká je to strategie?

Řešení. Výherní strategii má první hráč. Vyhraje vždy, pokud dělá následující tahy:

1. umístí křížek do prostředního políčka.
2. svůj druhý křížek (celkově 3. křížek ve hře) umístí tak, aby vznikl následující tvar:

	X	B
B	X	A
A		X

3. další tah provedeme v závislosti na tahu 2. hráče. Pokud vybere jedno z políček A, pak vybereme druhé políčko A. (Obdobně pro B).

Nyní už druhý hráč nemá kam táhnout. Hráč 1 vítězí.

Všimněte si, že poté, co první hráč umístí do prostředního políčka, tak každý další tah hráče 1 odpovídá tahu koněm v šachách (výchozí políčko je poslední umístěný křížek hráčem 2).

Úloha 3.B. "Milé děti", řekl Henry svým ratolestem. "Podívejte se, co se dnes řeší v novinách...", dodal a podal jim vytržený článek. V něm bylo napsáno: $P(x)$ je polynom, který vznikne roznásobením výrazu:

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)\dots(1+14x)(1-15x)$$

Jaký má $P(x)$ koeficient u x^2? "Tak co, vy to zvládnete vyřešit?"

Řešení. Z mnohočlenu vždy vybereme dvě závorky, z nich násobíme člen s x, u ostatních budeme násobit jedničkami. Zafixujeme si vždy jednu závorku jako vedoucí a pronásobíme ji se zbývajícími. Aby nám vznikla hezká suma, budeme číslo násobit i se sebou samým. Po vytknutí nám vznikne nám následující suma:

$$(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+\dots+2\cdot(-1)+2\cdot 2+\dots+(-15)\cdot 14+(-15)\cdot(-15)=$$
$$=\sum_{i=1}^{15}(-1)^i\cdot i\cdot\sum_{j=1}^{15}(-1)^j\cdot j$$

$$\sum_{i=1}^{15}(-1)^i\cdot i\cdot\sum_{j=1}^{15}(-1)^j\cdot j=\sum_{i=1}^{15}(-1)^i\cdot i\cdot(-8)=(-8)\cdot\sum_{i=1}^{15}(-1)^i\cdot i=(-8)\cdot(-8)=64$$

Každou dvojici jsme ale počítali dvakrát a navíc máme členy, kde jsme závorku násobili samu se sebou. Tedy koeficient musíme upravit následujícím způsobem:

$$\frac{64-\sum_{i=1}^{15}i^2}{2}=\frac{64-1240}{2}=-588$$

Výsledný koeficient je tedy -588.

Úloha 3.C. Kouma má funkci definovanou: $f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(2n)=n$, $f(4n+1)=2f(2n+1)$, $f(4n+3)=2f(2n+1)+1$ pro $n\in\mathbb{N}$. Ňouma si vymyslel číslo $a<2017$ a 2017krát na něj aplikoval funkci f. Nakonci dostal opět číslo a. Najděte všechny možné hodnoty a.

Řešení. Zkušenější čtenář může přeskočit úvodní pozorování.

Když nevíme co, vypíšeme si několik hodnot:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(m)$	1	1	3	2	6	3	7	4	12	5	13	6	14	7	15	8	24
$f(f(m))$	1	1	3	1	3	3	7	2	6	6	14	3	7	7	15	4	12
$f(f(f(m)))$	1	1	3	1	3	3	7	1	3	3	7	3	7	7	15	2	6
$f(f(f(f(m))))$	1	1	3	1	3	3	7	1	3	3	7	3	7	7	15	1	3

Nejprvé základní pozorování:

- Všechna čísla skončí na hodnotě tvaru 2^n-1.

- Jak je naznačeno svislýma čarama, tak se posloupnost konečných hodnot svým způsobem prodlužuje (1;1,3;1,3,3,7;1,3,3,7,3,7,7,15;1,3,...). Předěly jsou vždy před mocninou dvojky. Podíváme-li se na jednotlivé úseky, tak se jejich délka zdvojnásobuje. Navíc první půlka je totožná, jako předchozí úsek a druhá je jeho kopií, kde každou hodnotu $2^n - 1$ nahradíme $2^{n+1} - 1$.
- Koukněme se na to z druhé strany. Tyto čísla končí číslem 3: $3|5, 6|9, 10, 12|17, \ldots$. Můžeme si dále všimnout, že pokud od nich odečtem tu mocninou dvojky, která se nachází v jejich úseku dostaneme: $1|1, 2|1, 2, 4|1, \ldots$.

Všechna tato fakta a spousta jiných naznačují, že funkce se nějakým způsobem točí kolem mocnin dvojky. Náš desítkový zápis je postaven na mocninách desítky, podívejme se proto radši na binární zápis vstupních a výstupních hodnot

m	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100
$f(m)$	1	1	11	10	110	11	111	100	1100	101	1101	110
$f(f(m))$	1	1	11	1	11	11	111	10	110	11	1110	11
$f(f(f(m)))$	1	1	11	1	11	11	111	1	11	11	111	11
$f(f(f(f(m))))$	1	1	11	1	11	11	111	1	11	11	111	11

Nyní už vidíme lépe co se děje. Poslední cifra argumentu se přesune vždy na začátek s tím, že pokud je to nula, tak zmizí. Tedy číslo se opakovaným působením funkce f zbavuje nul v binárním zápise - rotuje. Hledaná čísla a proto musí mít posledních 2017 cifer jen jedničky. Jelikož čísla menší než 2017 mají maximálně 10 cifer, pak se bavíme jen o číslech, která nemají žádnou nulu v binárním zápise. Přeloženo do desítkové soustavy: Řešením jsou čísla 1,3,7,15,31,63,127,511,1023. Na těchto číslech se f chová jako identita.

Zbývá ukázat, že funkce se skutečně chová tak, jak tvrdíme. Co tvrdíme? Pokud přirozené číslo m zapíšeme v binární soustavě jako $(b_1b_2\ldots b_k)_2$, pak

$$f(m) = f((b_1b_2\ldots b_k)_2) = \begin{cases} (b_1b_2\ldots b_{k-1})_2 & b_k = 0 \\ (b_kb_1b_2\ldots b_{k-1})_2 & b_k = 1 \end{cases}$$

Dokažme matematickou indukcí vzhledem k délce k čísla m. Pro $k = 1, 2$ snadno ověříme. Nechť je nyní $m = 2n$, pak $b_k = 0$ a $f((b_1b_2\ldots b_{k-1}0)_2) = (b_1b_2\ldots b_k)_2$. Další případ je $m = 4n + 1$, to pak znamená $b_k = 1$, $b_{k-1} = 0$ a $f((b_1b_2\ldots b_{k-2}01)_2) = 2f((b_1b_2\ldots b_{k-2}1)_2) = (1b_1b_2\ldots b_{k-2}0)_2$, kde v poslední rovnosti jsme využili indukční předpoklad. Konečně $m = 4n + 3$ nám dává $b_k = b_{k-1} = 1$ a $f((b_1b_2\ldots b_{k-2}11)_2) = 2f((b_1b_2\ldots b_{k-2}1)_2) + 1 = 2(1b_1b_2\ldots b_{k-2})_2 + 1 = (1b_1b_2\ldots b_{k-2}0)_2 + 1 = (1b_1b_2\ldots b_{k-2}1)_2$. Tím je důkaz hotov.