Řešení 2. série

DĚLITELNOST

Úloha 2.1. Liběnka seděla na mezi s kukuřičným klasem a odlupovala jednotlivá zrnka. Dělala to už pěkně dlouho, když tu ji náhle napadlo, kolik nejméně kladných dělitelů může mít číslo, mezi jehož dělitele patří čísla 8, 9, 12, 20, 37, 45 a 111? Pomozte Liběnce s odpovědí na její otázku.

Řešení. Uvážme množinu čísel $M = \{8, 9, 12, 20, 37, 45, 111\}$ a ich najmenší spoločný násobok n. Každé číslo, ktoré je deliteľné každým číslom z M, je zároveň deliteľné číslom n. (To vieme z definície najmenšieho spoločného násobku.) Preto každé číslo deliteľné všetkými číslami z M bude mať aspoň toľko delitelov, koľko má n. Z toho plynie, že najmenší počet deliteľov, aký musí mať také číslo, je počet deliteľov čísla n. Najmenší spoločný násobok čísel z M je $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37$. Preto počet jeho deliteľov je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Úloha 2.2. Kouma a Ňouma zatím na pískovišti hrají hru. V písku je vyryto přirozené číslo n. Každý ve svém tahu číslo v písku zasype, odečte od něho nějakého jeho dělitele a výsledek znovu vyryje do písku. Prohraje ten, kdo do písku vyryje nulu. Kouma začíná. Pro která n má Kouma vítěznou strategii?

Řešení. Budeme dokazovat, že všechny pozice, kdy je v písku vyryto liché číslo, jsou proherní, a pozice, kdy je v písku číslo sudé, jsou výherní.

Nejdříve rozebereme nejmenší n: Pro $n = 1$ je pozice proherní, jelikož 1 má pouze dělitele 1. Pro $n = 2$ je pozice výherní, jelikož můžeme odečíst 1 a tím dostat soupeře do proherní pozice.

Nyní využijeme úplnou matematickou indukci. Tedy budeme předpokládat, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší než n a pomocí toho se budeme snažit dokázat, že to platí i pro n.

Pokud n je sudé, pak můžeme odečíst 1 a tím soupeře dostaneme do pozice s lichým číslem, které je menší než n – a tedy do proherní pozice. Pokud n je liché, pak můžeme odečíst pouze liché číslo (liché číslo nemá sudé dělitele) – a tím soupeře musíme dostat do pozice se sudým číslem, které je menší než n, tedy do výherní pozice.

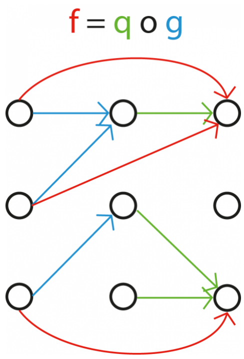
$\Rightarrow$ Tedy tvrzení jsme dokázali a už víme, že Kouma má vítěznou strategii právě pro sudá n.

Úloha 2.3. Henry, koukaje na dovádějící děti, si užívá chvíle klidu a otevírá svůj deníček z ranných pubertálních let. Jak tak listuje, zaujme ho právě jedna stránka, kam si kdysi zapsal: Nechť M je množina přirozených čísel neobsahujících číslici 0. Definuj novou operaci na M tak, že pokud v definici dělitelnosti nahradíš násobení touto operací, bude mít každé n-ciferné číslo právě $n - 1$ dělitelů. (Henry počítal s definicí z pomocného textu, dělitel je zde tedy levý dělitel.)

BRKOS Team 2017

Řešení. Stačilo si všimnout, že libovolné n-ciferné přirozené číslo neobsahující číslici nula umíme rozřezat na levou a pravou část $n-1$ způsoby. Operaci tedy definujme jako skládání čísel za sebou, snadno ověříme, že splňuje podmínku ze zadání.

Úloha 2.4. Henry se zasnil až mu deníček spadl na zem. Ticho v tu chvíli prořízl výkřik v dáli a dramaticky zavál vítr, který otočil list deníčku na druhou stranu, na níž se skvěl další příklad: Nechť $M_n = \{f|f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}\}, n \in N$ je množina všech zobrazení z n-prvkové množiny do n-prvkové množiny a uvažujme operaci skládání. Kolik zobrazení z M_n „nedělí zleva“ identické zobrazení $g(x) = x$ na n-prvkové množině?(Levá a pravá dělitelnost jsou definovány v pomocném textu.) Existují nějaká dvě zobrazení z M_n, která jsou „zleva nesoudělná“ (tzn. taková, že mají jediného společného levého dělitele a to identické zobrazení)? Popište, jak vypadají praví a leví dělitelé zobrazení $f(x) = \lfloor \frac{x+2}{3} \rfloor$, kde $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část čísla a.



Ilustrace g dělí zprava f v M_3

Řešení. (1) Podíváme se, co se stane, pokud budeme chtít napsat identické zobrazení jako složení dvou zobrazení $(id) = g \circ f$. Uvědomme si, že identické zobrazení je injektivní, proto musí být obě f i g injektivní. Protože ale zobrazení vedou z konečné množiny do ní samé, je každé injektivní zobrazení zároveň surjektivní a tedy bijekce, tedy jakési "proházení"prvků množiny. Po každém takovém proházení ale umíme vždy prvky prohodit zpátky, čímž dostáváme identitu. Můžeme tedy psát $(id) = p \circ p^{-1}$. Každá bijekce dělí identitu, proto počet zobrazení, která nedělí zleva identitu je počet neinjektivních zobrazení, což je počet všech mínus počet bijekcí, tedy $n^n - n!$.

(2) Žádná nesoudělná zobrazení neexistují, neboť pro libovolné f a g můžeme psát $f = (id) \circ f$, $g = (id) \circ g$ a podle části (1) máme $f = p \circ p^{-1} \circ f$, $g = p \circ p^{-1} \circ g$ (p je libovolné neidentická bijekce), tedy p dělí f i g.

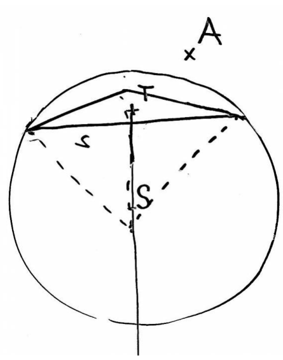
(3) Vidíme, že $f(x)$ "scvakává"trojice čísel tvaru $3k, 3k+1, 3k+2$ (mají stejný obraz). Mezi pravé dělitele pak patří libovolné zobrazení, které nescvakne více než 3 prvky a nescvakne prvky z 2 různých trojic. Pak vždycky můžeme prvky vhodně docvaknout a poprohazovat. Leví dělitelé jsou zobrazení, v jejichž obraze leží každé z čísel od 1 do $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$. Poté si vždy umíme vybrat jeden ze vzorů některého čísla a příslušnou trojci do něj scvaknout.

Úloha 2.A. Liběnka se vrátila domů s plnými kapsami kukuřice pro své 4 křečky. Ti na ni už netrpělivě čekali náhodně rozestavení v pokojíčku. Jak tak kouká na těch 8 velkých očí, napadlo ji... "Hmm... křečci rádi běhají v kouli... Co kdyby byli všichni mí křečci v jedné kouli? A co kdybych měla nekonečně koulí takových, že v každé jsou všichni mí křečci přesně v tom rozestavení, jak teď jsou? Popište, jak by vypadal průnik těchto koulí!"

Řešení. Na úvod předpokládejme, že křečci tvoří body.

Protože koule je konvexní těleleso, každá koule obsahující křečky musí obsahovat i všechny body "mezi nimi", což znamená ve čtyřstěnu s vrcholy v těchto bodech. (Je to totiž nejmenší konvextní útvar, který obsahuje tyto křečky*)

Pro každý bod vně čtyřstěnu (označme si jej A) dokážeme najít kouli, která obsahuje křečky, ale neobsahuje tento bod. Označme stěnu s tu, k jejímuž středu (těžišti) má bod A nejblíže. Potom určitě najdeme kouli opsanou stěně s takovou, že bod A neobsahuje (její střed bude ležet na kolmici k s procházející těžištěm T):



Pokud by bod A ležel v zakreslené kouli, ještě více oddálíme střed koule, čímž přiblížíme kulový vrchlík stěně s tak, že bod A opět nebude ležet v kouli.

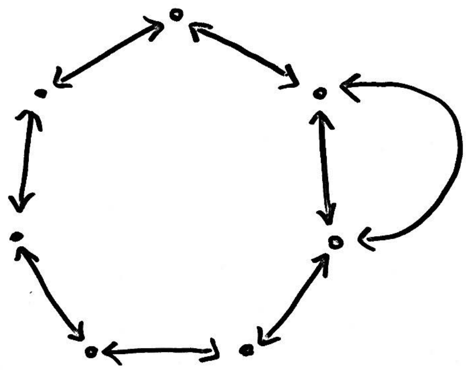
*Ještě zbývá zdůvodnit, proč je čtyřstěn nejmenší konvexní útvar obsahující čtyři body. Útvar je konvexní právě tehdy, pokud s každými dvěma body obsahuje i všechny body na úsečce mezi nimi. To znamená, že pokud útvar obsahuje čtyři vrcholy, musí nutně obsahovat i hrany mezi nimi (tzv. drátěný model). Jenže pro každý bod hrany platí totéž. Můžeme tedy spojit libovolný vrchol s libovolným bodem na libovolné hraně a vzniklé úsečky, tvořící stěnu čtyřúhelníka, musí útvar obsahovat také. Potom ale spojíme jeden vrchol se všemi body protější stěny a získáme celý čtyřúhelník.

Ukázali jsme tedy, že každý bod zevnitř čtyřstěnu leží v průniku všech koulí a každý bod vně ne. Řešením je tedy čtyřstěn s vrcholy ve křečcích.

Pokud by křečci leželi v jedné rovině, čtyřstěn zdegeneruje do čtyřúhelníku (resp. trojúhelníku, pokud čtvrtý vrchol leží v protější základně) a pokud navíc ještě na jedné přímce, bude čtyřúhelník zdegenerován na úsečku. Kdyby byli všichni křečci na sobě, řešením je bod.

Úloha 2.B. Kouma s Ňoumou už změnili objekt svého zájmu - nyní si do písku kreslili šipky a kolečka. Nakreslili 7 koleček a 6 šipek mezi nimi:
$\circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ$ Dokreslete do písku další šipky tak, že z libovolného bodu do jiného vedou právě tři cesty po šipkách. Cestou po šipkách se rozumí posloupnost šipek, která respektuje jejich orientaci a každý bod je navštíven nejvýše jednou.

Řešení. Body si uspořádejme do sedmistěnu, přidejme šipku z posledního bodu do prvního, ke každé šipce přidejme její protisměrnou a nějaké dva sousední body propojme ještě dvěma protisměrnými šipkami.

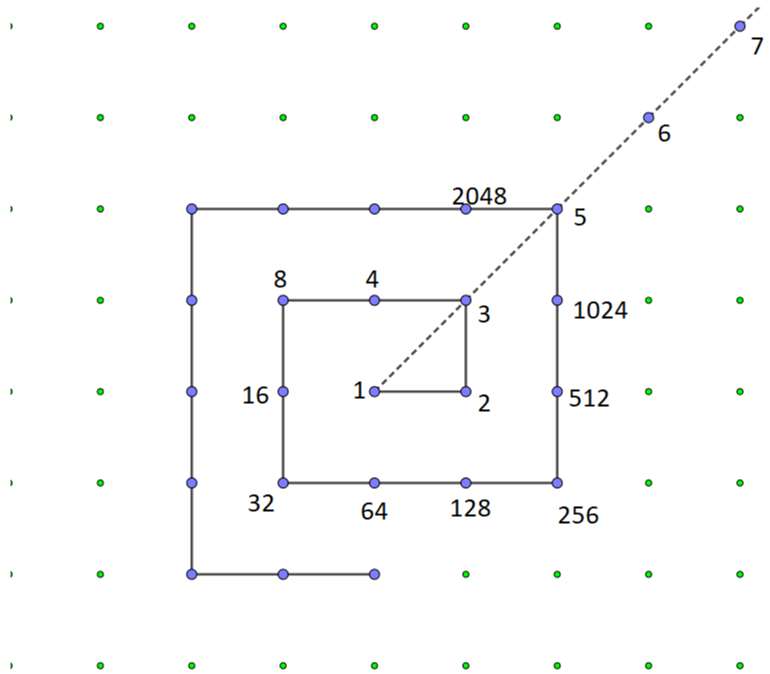


Z každého bodu se teď totiž dostaneme do jiného buď po směru nebo proti směru hodinových ručiček. Jednou ještě půdeme přes body se dvěma šipkami mezi sebou, tak se ještě můžeme rozhodnout mezi dvěma cestami.

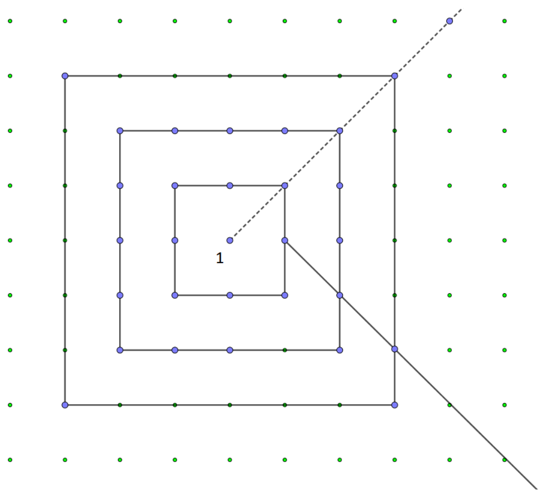
Úloha 2.C. Henry se sehnul na zem, aby zvedl svůj deníček, přičemž si nemohl nevšimnout, že mu kachličky na zemi (ano, celou dobu byl v koupelně) neuvěřitelně evokují celočíselnou mřížku. Přiřaďte každému jejímu mřížkovému bodu (bodu s celočíselnými souřadnicemi) přirozené číslo tak, aby:

- žádným 2 bodům nebylo přiřazeno stejné číslo
- na mřížce se nacházela všechna přirozená čísla
- pro libovolný obdélník s vrcholy v mřížkových bodech a se stranami rovnoběžnými s mřížkou platilo, že jeho obsah je menší nebo roven čtvrtině nejvyšší z hodnot přiřazených jeho vrcholům.

Řešení. Jedním z možných řešení je si vybrat počátek a do něj umístít 1, na libovolnou polopřímku vedoucí z tohoto bodu umístit všechna čísla, která nejsou mocninou dvojky. Následně po spirále vedoucí z 1 umístit všechny mocniny dvojky (případně přeskočit nemocninu dvojky). Nejlépe to řekne obrázek.



Nyní si ukažme, že toto řešení splňuje zadání. Zjevně žádným dvěma bodům nebylo přiřazeno stejné číslo a na mřížce se nachází všechna přirozená čísla. Dokazujeme poslední bod.



Uvažme kružnice - čtverce se středem v 1. Sami si snadno ověříte, že obdelníky s body uvnitř čtverce 2x2 splňují zadání. Uvažujme tedy hlavně ostatní body. Každé číslo leží na nějaké kružnici. Zároveň ze všech čísel na dané kružnici je nejmenší to číslo, které je těsně nad levým dolním rohem. Čísla jsou na obrázku na nečárkované polopřímce. Je tomu tak vzhledem k tomu, jak jsme konstruovali spirálu. Označme si tato čísla postupně od středu $P_1 = 2, P_2, P_3, \ldots$. Když už jsme u značení, nechť r_A značí "poloměr"kružnice na které leží číslo A, tedy polovinu šířky čtverce. Zjevně $A \geq P_{r_A}$. Matematickou indukcí si sami dokažte, že $P_n \geq 2^{(2n-1)^2-n+1}$. Dohromady tedy můžeme o obecném bodě A tvrdit, že $A \geq 2^{(2r_A-1)^2-r_A+1}$. Tento výraz můžeme pro lepší manipulaci dál zdola omezit na $A \geq 2^{2r_A}$. Opět si sami dokažte nerovnost $(2n-1)^2 - n + 1 \geq 2n$.

BRKOS Team 2017

Dalším krokem je si vzít libovolnou úsečku AB, která je součástí nějakého obdelníku. Tato úsečka leží nějakou částí XY na spirále. Kvůli tomu nutně $r_X \geq |XY|/2$, $r_Y \geq |XY|/2$. Dále navíc $r_A \geq r_X + |AX|$, $r_B \geq r_B + |BX|$. Všimněme si, že $r_A + r_B \geq |AB|$. O bodech A, B tedy víme $\max A, B \geq \sqrt{AB} \geq \sqrt{P_{r_A} P_{r_B}} \geq \sqrt{2^{2r_A} 2^{2r_B}} \geq 2^{|AB|}$.

Už jsme téměř hotovi. Vezměme si libovolný obdélník $ABCD$ s nejvyšší hodnotou v bodě A a $|AB| > |AD|$. Pak $S_{ABCD} \leq |AB|^2 \leq (\log_2 A)^2$. Stačí proto ukázat, že $(\log_2 A)^2 \leq \frac{A}{4}$. Naštěstí stačí tuto nerovnost dokazovat pro čísla větší než 256 (mimo 2x2 čtverec). Chceme dokázat $\log x \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$. Zdatnější z vás mohou použít derivace. Elementárnější způsob je si nakreslit grafy funkcí na obou stranách a uvědomit si, kde leží jejich průsečíky. Nápověda: Jeden z nich je v bodě $x = 256$.