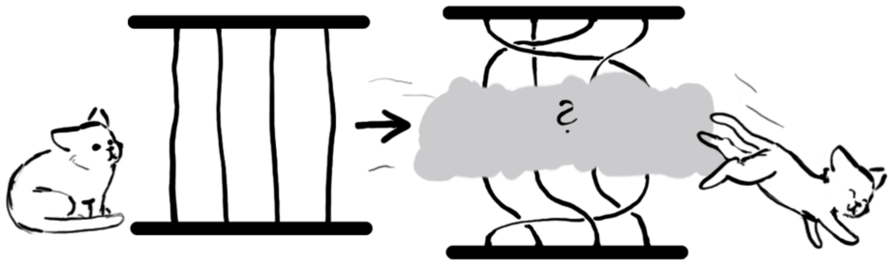
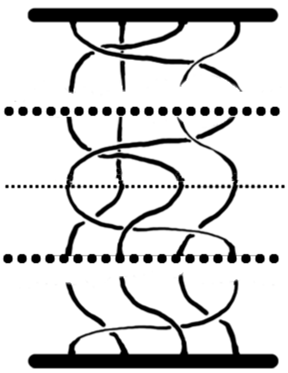
Řešení 1. série

SYMETRIE A ROTACE

Úloha 1.1. Kouma tkal koberec a upevnil si nitě ve stavu rovnoběžně. Leč stav mu skočila kočka an začala si s provázky hrát. Provázky sice zůstaly upevněné, však zašmodrchané. Výsledný stav vypadal takto. Doplňte prostřední část obrázku, tzn. nakreslete, kterak budou provázky napojeny a jak se budou křížit (pozor, záleží, který při křížení bude "dole"a který "nahoře").



Řešení. Po chvíli zamyšlení, co znamená, že provázky jsou stále upevněné na stavu nás napadne řešení, ve kterém horní začátek obrázku ozrcadlíme, spodní taky a konce uprostřed spojíme.



Úloha 1.2. Kouma si hrál se svojí oblíbenou krychlí, která měla každou stěnu označenou lepítkem jiné barvy. Přišel Ňouma, krychli mu sebral a všechna lepítka mu sundal. To mu ale bylo málo, a tak dal krychli do zrcadlicí krabičky, jež někdy zrcadlově zobrací svůj obsah a jindy ne.

"Kéž bych si byl označil některé z vrcholů krychle, pak bych možná uměl lepítka vrátit na jejich původní místo"povzdechl si Kouma nad výsledkem Ňoumova řádění.

BRKOS Team 2017

Existuje označení vrcholů jednou barvou (tedy vrchol buď je, nebo není označen), které by stačilo k jednoznačnému určení stěn, přestože Kouma neví, zda byla krychle zrcadlena, či ne?

Řešení. Řešení od Dalibora Kramáře: Označme n počet obarvených vrcholů $n; n \in M; M = \{x \in \mathbb{N}_0; x < 9\}$.

Jelikož situace pro n obarvených vrcholů je stejná jako pro 8-n, tak BÚNO jsou obarveny maximálně 4 vrcholy. Úlohu budeme řešit tak, že najdeme možné zrcadlení a ukážeme, že není označení které unikátně zobrazí krychli.

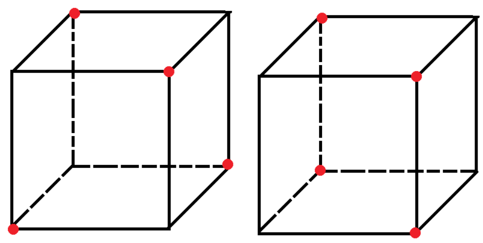
Pro $n \in \{0, 1, 2\}$ zřejmě neexistuje řeření (lze dokázat například vyzkoušením možností, pro $n = 2$ jich je pouze 7, když BÚNO zafixujeme jeden bod.)

(1) $n = 3$

Máme 6 stěn a 3 vrcholy, jeden vrchol přiřadíme právě třem stranám, proto dle Dirichletova principu na alespoň jedné straně jsou alespoň dva vrcholy. Nejdříve vyřešíme situaci pro právě dva vrcholy. BÚNO si zvolíme body na horní stěně. Zde je situace vždy nejednoznačná pro body na diagonále i na hraně. Pro tři vrcholy na jedné stěně je situace zřejmě nejednoznačná. (Díky zrcadlení)

(2)$n = 4$

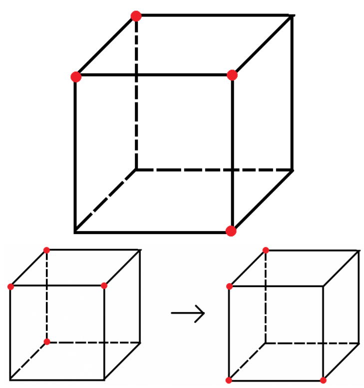
Situaci opět rozdělíme na případy, kdy leží tři body na stěně, a kdy ne. Pokud ne, tak dostáváme jen dvě situace (+ otočení). Viz obr (zřejmě nejednoznačné): Nyní máme tři vrcholy na jedné straně,



BÚNO zvolíme je na svrchní stěně.

Pokud zvolíme čtvrtý bod tak, že nevznikne nová stěna s třemi obarvenými vrcholy, nebo vzniknou (právě) dvě, pak situace je opět nejednoznačná. V prvním případě proto, že situace je ekvivalentní se situací 1. V druhém se situace nezmění otočením podle tělesové úhlopříčky.

Zbývá nám jen situace, kdy se vytvoří právě jedna stěna se třemi vrcholy. Tyto situace si nakreslíme:



Zde v obou případech ukážeme stejné označení vrcholů při otočení (v druhém postup provedeme na otočené krychli).

Obě krychle 9 (první a modifikovanou) otočíme o otočíme o 180^o okolo osy z (předozadní), následně o 90^o podle osy y při pohledu shora ve směru hodin.

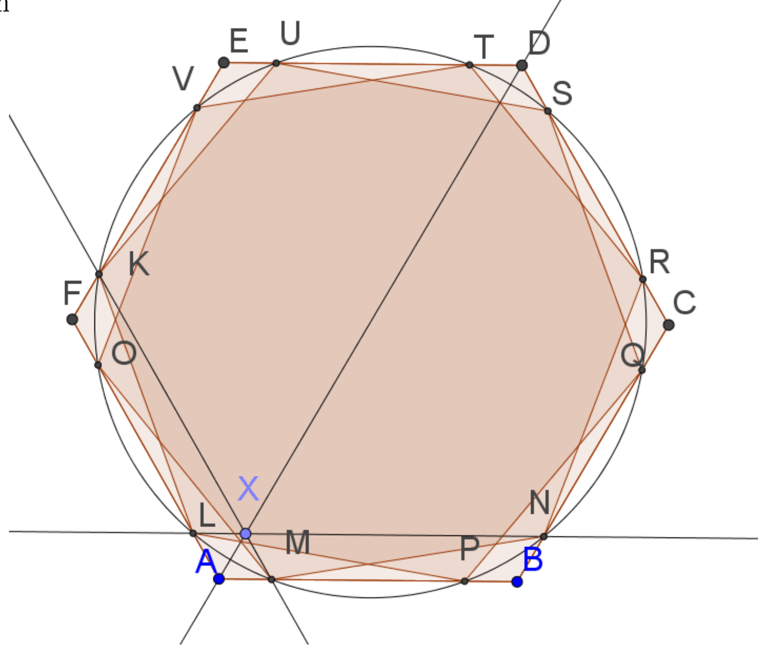
Vrcholy tedy nelze unikátně označit.

Úloha 1.3. Henry se jednoho letního dne rozhodl vytvořit umělou sněhovou vločku.

Vločka má tvar pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$.

Na úhlopříčce AD si vyznačil bod X, kterým vedl dvě přímky, jednu rovnoběžnou ke straně AB, druhou ke straně AF. Průsečíky těchto přímek s okrajem vločky označil body K, L, M, N jako na obrázku níže.

Dokažte, že body K, L, M, N leží na kružnici, která protíná šestiúhelník v dalších 8 bodech O, P, Q, R, S, T, U, V. Dále dokažte, že útvary $OMNRTV$ a $KLPQSU$ jsou pravidelné šestiúheln



Řešení. Poznamenejme nejdříve, že libovolná symetrie (otočení, osová nebo středová souměrnost) zachovává úhly a vzdálenosti. Dokážeme, že $KLMN$ leží na kružnici, jejíž střed S je středem šestiúhelníku. Podívejme se na vzdálenosti jednotlivých bodů od S. Označme $LS = r$, tuto vzdálenost má také MS neboť vidíme, že M se zobrazí na L při osové souměrnosti podle osy o_{AD} (přímka určená body A a D). Dále vidíme, že M se zobrazí na K při osové souměrnosti podle osy $o_{S_{FA}S_{CD}}$ (přímka určená středy stran FA a CD). Tedy $SM = SK$ a dále $SK = SN$ díky osové symetrii podle o_{AD}. Tyto čtyři body tedy leží na kružnici se středem S a vidíme, že pokud X je různé od S, pak tato kružnice protne šestiúhelník v dalších 8 bodech. Nyní dokažme, že $KLPQSU$ je pravidelný šestiúhelník. Uvažme rotaci o 60 stupňů (proti směru hodinových ručiček). Potom se bod L zobrazí na bod P, neboť L leží na straně AF, která se zobrazí na AB a vzdálenost LA je stejná jako vzdálenost PB ($LA = MA$ podle o_{AD} a $AM = PB$ podle $o_{S_{AB}S_{DE}}$). Tedy úhel LSP je 60 stupňů a $LS = PS$, což znamená, že tedy APS je rovnostranný a $LP = r$. Dalšími rotacemi dostaneme stejný výsledek pro zbylé vrcholy šestiúhelníku $KLPQSU$. Všechny strany tak mají stejnou délku a šestiúhelník je pravidelný. Pravidelnost druhého šestiúhelníku plyne z osové symertrie podle o_{AD} ($OMNRTV$ je obrazem $KLPQSU$). Poznámka:

Pokud X je S nebo X leží ve čtvrtině úhlopříčky AD, dva menší šestiúhelníky se sběhnou do jednoho a kružnice pak protíná $ABCDEF$ pouze v 6 bodech, to nám v zadáni trochu uteklo.

Úloha 1.4. Matěj, Liběnka a Henry hráli matematickou tichou poštu. Každý si tajně vymyslel vlastní kvadratický polynom (nenulový). Matěj vzal libovolné číslo, dosadil do svého polynomu a pošeptal výsledek Liběnce. Liběnka toto číslo dosadila do svého polynomu a pošeptala svůj výsledek Henrymu a ten provedl totéž a výsledné číslo vykřikl. Matěj neměl fantazii a vymyslel jen čísla $1, \ldots, 8$. Velmi se podivil tomu, že Henry pokaždé vykřikl číslo 0. Ňouma šel kolem a pochlubil se tím, že už zná všechny tři polynomy. Mohl se tento příběh stát ve skutečnosti? Tedy existují kvadratické polynomy f, g, h takové, že řešením rovnice $f(g(h(x))) = 0$ jsou (mimo jiná) čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Řešení. Pro kvadratický polynom platí, že stejnou výstupní hodnotu má pro maximálně dvě vstupní hodnoty. Toto nastane právě tehdy, když jsou obě vstupní hodnoty stejně vzdáleny od vrcholu paraboly. Abychom tedy mohli dostat 8 kořenů, tak všechny tři polynomy f, g, h musí počet hodnot zredukovat na polovinu.

Na vstupu máme hodnoty $1, \ldots 8$ a polynom h je musí zredukovat na 4 hodnoty. Proto musí platit, že vrchol paraboly polynomu h musí být v bodě $[\frac{9}{2}; h(\frac{9}{2})]$. Polynom h si tedy označme $h(x) = a(x - \frac{9}{2})^2 + c; a \neq 0$.

Polynom g teď musí ze 4 vstupních hodnot $h(1) = h(8), h(2) = h(7), h(3) = h(6), h(4) = h(5)$ vytvořit pouze 2 výstupní hodnoty. Tyto vstupní hodnoty jsou buď ve vzestupném nebo v sestupném pořadí (protože jedna větev paraboly je buď klesající nebo rostoucí). Aby byly výstupní hodnoty pouze dvě, musí platit, že hodnoty $h(1), h(4)$ a $h(2), h(3)$ jsou stejně vzdáleny od vrcholu paraboly funkce g. Tedy musí platit, že aritmetický průměr hodnot $h(1), h(4)$ a $h(2), h(3)$ musí být stejný.

$\frac{h(1)+h(4)}{2} = \frac{h(2)+h(3)}{2}$
$h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$
$a(1 - \frac{9}{2})^2 + c + a(4 - \frac{9}{2})^2 + c = a(2 - \frac{9}{2})^2 + c + a(3 - \frac{9}{2})^2 + c$
$a\left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2c = a\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 2c$
$a\left(\frac{48}{4} + \frac{1}{4} - \frac{25}{4} - \frac{9}{4}\right) = 0$
$a\frac{15}{4} = 0$
$a = 0$

Ale o a víme, že je nenulové, tudíž jsme došli ke sporu.

Zjistili jsme tedy, že existence takových polynomů vede ke sporu, a proto takové polynomy nemohou existovat.

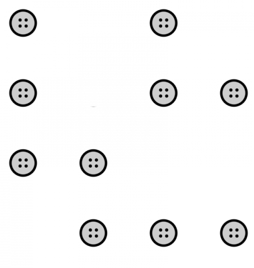
Úloha 1.A. Kouma před Ňoumu opatrně vyskládal bezrozměrné knoflíky do mřížky 4×4, odstranil knoflíky ze 2 protějších rohů a položil Ňoumovi otázku: "Kolik dalších knoflíků musím oddělat, aby žádné čtyři zbývající neutvořily čtverec?"

Ňouma bez váhání odpověděl: "Stačí oddělat tyto dva."

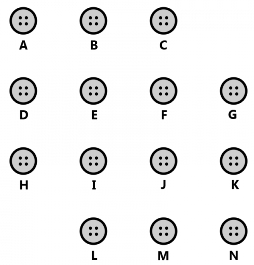
"Nechal se nachytat! Nechal se nachytat! Zapomněl jsi na šikmé čtverce!"začal zpívat Kouma.

Ukažte Ňoumovi, kolik nejméně knoflíků je potřeba oddělat, aby libovolné čtyři knoflíky neutvořily žádný, tedy ani šikmý čtverec.

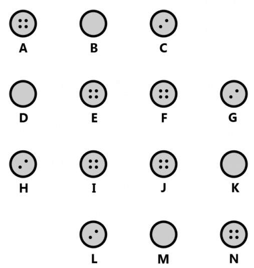
Řešení. Je potřeba odstranit nejméně 4 knoflíky. S odstraněním pouze 4 to lze následovně:



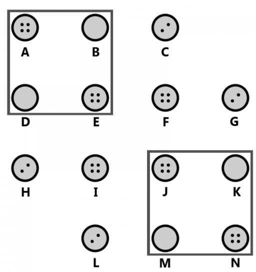
Dále dokažme, že nestačí odstranit jen 3 knoflíky. Označme si knoflíky následujícím způsobem:



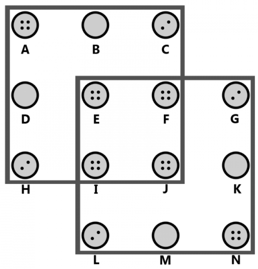
Zaměřme se na čtverce BHMG a CDLK, tyto čtverce nemají žádný společný knoflík. Budeme muset tedy odstranit jeden knoflík z každého z nich, označme si C, G, H, I jako *Dvojky* (s dvěma dírkami) a B, D, K, M jako *Nuly* (bez dírek).



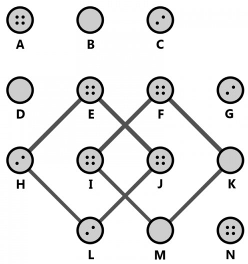
Rozeberme všechny 3 případy podle toho, jakého druhu jsou odebrané knoflíky (dvě *Dvojky*, dvě *Nuly*, každý jiný). Pokud jsou oba dva odebrané knoflíky *Dvojky*, vidíme na obrázku, že se obou čtverců ADEB a JMNK odstraněním jednoho knoflíku nezbavíme.



Pokud jsou oba *Nuly*, tak máme problém se čtverci AHJC a ELNG.



Pokud jsou různého druhu, tak dvě zbylé *Dvojky* tvoří čtverec s knoflíky E a J, obdobně pro *Nuly* F a I. Tyto čtverce nemají společný knoflík, opět to nezvládneme jen odstraněním jednoho knoflíku. Zde je konkrétní příklad, pokud jsme odstranily B a C.



Ve všech případech jsem tedy ukázali, že 3 knoflíky nestačí.

Úloha 1.B. Bubla si hlasitě povzdechla.

"Copak?"začala se zajímat Liběnka.

"Mám kvadratickou rovnici $x^2 + ax + b = 0$, ale pro má celá čísla a, b nemá reálné řešení."

"A má řešení $\lfloor x^2 \rfloor + ax + b = 0$?"

Bubla se zatvářila zmateně, ale po krátké pauze vybuchla v nekontrolovatelný záchvat smíchu.

Existují celá čísla a, b taková, že rovnice $x^2 + ax + b = 0$ nemá reálné řešení, ale $\lfloor x^2 \rfloor + ax + b = 0$ má? ($\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřevyšuje x.)

Řešení. Aby rovnica $x^2+ax+b = 0$ nemala reálne riešenie, musí mať záporný determinant a teda musí platiť $a^2 - 4b < 0$, z čoho plynie $\frac{a^2}{4} < b$. Z definície zaokrúhľovania platí $x^2 - 1 < \lfloor x^2 \rfloor$, a preto $x^2 + ax + b - 1 < \lfloor x^2 \rfloor + ax + b$. Keďže pravá strana je niekedy rovná 0, tak ľavá strana je niekedy záporná. Keďže funkciou ľavej strany je konvexná parabola, tak musí prechádzať cez os x a teda má reálne korene. Preto platí $a^2 - 4b + 4 > 0$ a teda $\frac{a^2}{4} + 1 > b$. Tým sme zhora aj zdola ohraničili b: $\frac{a^2}{4} + 1 > b > \frac{a^2}{4}$. Ak je a párne, tak a^2 je deliteľné 4 a nie je žiadne celé b, ktoré by vyhovovalo daných ohraničeniam. Ak je a nepárne, tak má a^2 po delení 4 zvyšok 1. Preto $b = \frac{a^2+3}{4}$. Môžeme teda skúšať a a dopočítať príslušné b a jednoducho overiť, že rovnica so zaokrúhlením má riešenie. Také dvojice sú napríklad $(3, 3), (-3, 3), (5, 7), (-5, 7) \ldots$.

Úloha 1.C. Kouma a Ňouma stojí v počátku ovocného sadu. Jejich ovocný sad je celočíselná mřížka 2017×2017, ve které se v každém bodě mřížky kromě počátku nachází jabloň. Každý den si vyberou dvě přirozená čísla i, j, $i \neq j$, a vydají se do bodu (i, j). Kouma jde po přímce a Nouma chodí jen doprava a nahoru po mřížce. Pokud narazí do nějaké jabloně, vezmou si z ní jablko, i z jabloně v bodě (i, j). Kouma si všiml, že existuje množina čísel S taková, že pokud se vydají do bodu (i, j), $i, j \in S$, $i \neq j$, bude poměr počtu jablek, které nasbírají (Ňouma/Kouma) taky v S. Kolik prvků muže mít S?

Řešení. Nejprve rozmysleme, kolik oba nasbírají jablek, když se vydají do bodu (i, j). Ňouma musí ujít délku i po horizontální ose a délku j po vertikální, nehledě na to kudy půjde. Proto sesbírá $i + j$ jablek. Kouma jde po přímce danou rovnicí $\frac{y}{x} = \frac{j}{i}$, kde navštíví ty body x, y, které splňují $0 < x \leq i, 0 < y \leq j$. Vykraťme zlomek $\frac{j}{i}$ do základního tvaru $\frac{j}{i} = \frac{j_0(i,j)}{i_0(i,j)} = \frac{j_0}{i_0}$[1]. Pak nutně $y = k \cdot j_0$, $x = k \cdot i_0$, pro přirozené k, splňující $0 < k \leq (i, j)$. Pro k máme tedy (i, j) možností, což je počet jablek, které Kouma nasbírá.

Nyní se už podívejme na množinu S. Víme, že pokud $i, j \in S$, $i \neq j$, pak $\frac{i+j}{(i,j)} \in S$. Pokud by S obsahovala nesoudělné prvky i, j, pak by obsahovala i prvek $i+j$. Navíc by obsahovala i všechny prvky tvaru $i + tj$, pro libovolné t a tím byla nekonečná, přestože náš sad je konečný. A proč obsahuje všechny tyto prvky? Dokažme indukcí: Pokud $i + (t-1)j \in S$, pak i $\frac{i+(t-1)j+j}{(i+(t-1)j,j} = \frac{i+tj}{(i,j)} = i + tj \in S$.

Nutně musí být všechna čísla po dvou soudělná a tedy $(i, j) \geq 2$ pro všechna $i, j \in S$. Navíc víme, že všechny prvky S jsou větší než 1. Nyní přichází trik: Jelikož je S konečná, můžeme uvážit nejmenší prvek $i > 1$ a druhý nejmenší prvek $j > 2$. Mrkněme se na velikost $\frac{i+j}{(i,j)}$:

$$i \leq \frac{i+j}{(i,j)} \leq \frac{i+j}{2} < \frac{j+j}{2} = j$$

Z toho vyplývá, že $\frac{i+j}{(i,j)} = i$, protože mezi prvky i a j žádný jiný prvek není. Tedy $i(i, j) = i + j$. i dělí obě strany, takže i j, z čehož hned $(i, j) = i \Rightarrow i^2 - i = j$. Všimněme si, že pokud $i = 2$, pak $i = j$, proto $i > 2$. Vidíme, že dvouprvková množina $\{i, i^2 - i\}$ splňuje zadání a všechny dvouprvkové množiny splňující zadání jsou tohoto tvaru. Pokud bychom připustili existenci třetího prvku, vezměme opět třetí nejmenší, k, pak $\frac{i+k}{(i,k)} = j = i^2 - i$ (nemůže se rovnat i, jinak by $j = k$), což upravíme na $(i, k)(i^2 - i) = i + k$. Opět $i|k \Rightarrow i = (i, k)$. Proto $k = i^3 - i^2 - i$. Tak teď zbývá poslat Ňoumu a Koumu do bodu $(j, k) = (i^2 - i, i^3 - i^2 - i)$:

$$\frac{i^3 - i^2 - i + i^2 - i}{(i^2 - i, i^3 - i^2 - i)} = \frac{i^3 - 2i}{(i^2 - i, i^3 - 2i)} = \frac{i^2 - 2}{(i - 1, i^2 - 2)} = \frac{i^2 - 2}{(i - 1, 1)} = i^2 - 2$$

To skoro vypadá, že $j < i^2 - 2 < k$! Dokažme to. Levá nerovnost je jasná $i^2 - i < i^2 - 2$. Pravá nerovnost také, neboť $i^2 - 2 < i^3 - i^2 - i$ je ekvivalentní s $0 < i^3 - 2i^2 - i + 2 = (i - 2)(i + 1)(i - 1)$, což platí (každý z činitelů je kladný). No ale mezi prvky j, k žádný jiný není. To je spor s existencí prvku k.

Všechny množiny S splňující zadání jsou tedy dvouprvkové.

[1] (i, j) značí největší společný dělitel čísel i a j