Řešení 6. série

3D

Úloha 6.1. Linda s Moutesem, Minh a Vojtou šli do IKEI. V dětském koutku dávali *Kouma a Ňouma vrací úder*. Moutes se nudil, protože tam bylo málo princezen (kromě princezny Liběnky), až do té doby, dokud se na obrazovce neobjevila tato úloha: Určete množinu středů všech kulových ploch, které procházejí danými třemi navzájem různými body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Pomůžete Moutesovi vyřešit tuto úlohu?

Řešení. Hledanou množinou bude průsečnice rovin souměrnosti úseček AB a BC. Právě pro body X na rovině souměrnosti úsečky AB platí $|AX| = |BX|$. Právě pro body Y na rovině souměrnosti úsečky BC platí $|BY| = |CY|$. Právě na průsečnici těchto rovin leží tedy body $Z : |AZ| = |BZ| = |CZ|$. To je ekvivalentní s tím, že bod Z je středem kulové plochy, na které leží body A, B, C. Kdyby průsečnice neexistovala, roviny by byly rovnoběžné a tudíž úsečky by byly rovnoběžné, takže by musely body A, B, C ležet na jedné přímce.

Úloha 6.2. Jakmile vyřešil úlohu, pohádka skončila. Je dána přímka p a mimo ní bod A. Určete množinu pat kolmic vedených bodem A ke všem rovinám procházejícím přímkou p.

Řešení. Uvažme rovinu α, která prochází bodem A a je kolmá na přímku p. Průsečík této roviny s přímkou p označme jako bod P. Promítněme vše do této roviny rovnoběžným promítáním a zjistíme, že by hledanou množinou všech pat kolmic mohla být Thaletova kružnice nad průměrem AP, a to včetně bodů A a P.

Nejprve ukažme, že všechny body ležící na kružnici vyhovují zadání. Každý takový bod, nazvěme ho T je AT kolmé na PT, díky tomu, že leží na Thaletově kružnici. Dále přímka p je kolmá na přímku AT, protože p je kolmá na rovinu α, ve které AT leží. Proto AT je kolmá na rovinu tvořenou různoběžkami p a PT, což je právě nějaká rovina β procházející přímkou p. Tedy jakýkoli bod T ležící na Thaletově kružnici je opravdu patou kolmice vedené z bodu A na rovinu procházející přímkou p.

Dále musíme ukázat, že žádný jiný bod do množiny nepatří. Přímka, která kolmá na rovinu, je kolmá na všechny přímky, které v ní leží. To znamená, že pokud je AT kolmá na rovinu procházející přímkou p, pak musí být kolmá na p, tedy nesmí ležet mimo rovinu α. Ze stejného důvodu musí být AT kolmá na PT, z čehož už vyplývá,že T musí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem AT.

Úloha 6.3. Najednou se Linda pozastavila: „Co to bylo?“, Vojta zvolal: „Jakto, že skončilo pohádkování?“ a Minh se podivila: „Jakto, že úloha 2 tam byla jen tak?“ V odpověď se ozvalo z vyšší dimenze: „Stali jsme se svědky nějaké anomalie!“ Po chvíli úžasu se rozklepala země: „Ach ne! Děje se to znova!“ Jsou dány dvě různé přímky a, b a rovina ρ, která je kolmá k přímce a. Najděte v rovině ρ množinu všech bodů, kterými je možno proložit dvě navzájem kolmé roviny, z nichž jedna prochází přímkou a a druhá přímkou b.

Řešení. Představíme si úlohu tak, že si rovinu ρ postavíme na zem, tedy přímka a bude čnít do výšky jako kůl. Označme A průsečík a a ρ. Nyní rozebereme 3 případy:

1. $b \nparallel \rho$ – pak označme B průsečík b a ρ. Nyní ukážeme, že pro kterýkoli bod splňující zadání jsou stopy oněch rovin na sebe kolmé: buď X libovolný bod splňující zadání. Pak pro něj existují roviny aX, bX procházející po řadě přímkami a, b, které jsou na sebe kolmé. Platí ale, že $aX \perp \rho$, tedy všechny kolmice k aX ležící v ρ musí být kolmé na průsečníci $aX \cap \rho$. Díky tomu, že $aX \perp bX$ víme, že kolmá projekce bX do aX je přímka, nás ale zajímá, kam se v této projekci zobrazí bod B. Ale díky tomu, že všechny kolmice na aX ležící ρ jsou kolmé na stopu víme, že se B zobrazí na svou kolmou projeci na stopu aX (průsečnice aX a ρ). Tedy X leží na thaletově kružnici nad průměrem AB. Zároveň zjevně pro každý takový bod dokážeme takové 2 roviny najít (díky kolmosti stop máme zaručenou kolmost rovin. Pozn.: pokud $A = B$ pak argumentace zůstává zachována, pouze se kružnice zdegeneruje do bodu.

2. $b \parallel \rho, b \cap \rho = \emptyset$ – Pak musí být rovina aX taková, aby $b \perp aX$. Jinak totiž jediná rovina kolmá k aX procházející b bude rovnoběžná s ρ a tedy nebude mít s ρ průnik (díky předpokladu $b \cap \rho = \emptyset$). Taková existuje zjevně jediná. Je zcela zřejmé, že jakýkoli bod stopy přitom splňuje zadání, neboť opět už kolmost $b \perp aX$ zaručuje kolomost $aX \perp bX$ pro libovolnou rovinu procházející b. Hledaná množina je tedy kolmice ke kolmé projekci b procházející A.

3. $b \subseteq \rho$ – Nechť je libovolné $X \in \rho$. Pak volbou aX = libovolná rovina procházející a a X, $bX = \rho$ splníme zadání, tedy hledaná množina je celé ρ.

Tím jsme rozebrali všechny případy a příklad je hotov.

Úloha 6.4. Je dána rovina ρ a uvnitř jednoho z poloprostorů s hraniční rovinou ρ jsou dány body A, B různě vzdálené od roviny ρ. Určete množinu středů všech kulových ploch κ, které se dotýkají roviny ρ a procházejí body A, B.

Řešení. Nechť přímka AB protíná rovinu ρ v bodě P. Použijeme mocnost bodu P ke kulovým plochám κ, které procházejí body A, B. Označíme-li ještě T bod dotyku takové plochy s rovinou ρ, platí vztah

$$|PA| \cdot |PB| = |PT|^2. \tag{6.1}$$

Tímto vztahem je délka $|PT|$ jednoznačně určena. Body dotyku uvažovaných ploch s rovinou ρ leží tedy na kružnici $k = (P, |PT|)$. Nechť je bod S středem jedné z uvažovaných kulových ploch κ. Potom a) musí být splněn vztah $|SA| = |SB|$, b) musí pata T kolmice vedené bodem S k rovině ρ ležet na kružnici k. Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel v rovině souměrnosti σ bodů A, B. Aby byl splněn i požadavek b), musí bod S ležet na rotační válcové ploše V s řídicí kružnicí k. Je tedy nutné, aby bod S ležel na průniku $e = \sigma \cap V$, kterým je, jak známo, elipsa. Ve zvláštním případě, když je přímka p kolmá k rovině ρ, je tato elipsa kružnicí. Ještě dokážeme, že všechny body elipsy e leží v poloprostoru (ρ, A):
Podle vztahu (1) platí $|PT| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|}$. Označme O střed úsečky AB, pak je $|PO| = (|PA| + |PB|) : 2$. Z AG nerovnosti plyne $\sqrt{|PA| \cdot |PB|} < (|PA| + |PB|) : 2$, tj. $|PO| > |PT|$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O, platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ρ od bodu P tím spíše $d > |PT|$, takže přímka s leží ve vnější oblasti kružnice k a tím leží všechny body elipsy e v poloprostoru.
Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S, je bod S bodem roviny σ, v níž elipsa leží, takže platí vztah $|SA| = |SB|$. Vedeme-li dále bodem S přímku $q \perp \rho$, leží přímka q na ploše V a protíná kružnici k v bodě, který označíme T. Sestrojíme nyní kulovou

plochu κ o středu S, která prochází body A, B, a má tedy poloměr $r = |SA| = |SB|$. Mocnost M bodu P ke kulové ploše κ je rovna $|PA||PB| = |PT|^2$. Mocnost M můžeme také vyjádřit ve tvaru $M = (|PS|+r)(|PS|-r) = |PS|^2 - r^2$, takže je $|PS|^2 - r^2 = |PT|^2$. Ale v pravoúhlem trojúhelníku STP platí $|PT|^2 = |PS|^2 - |ST|^2$, takže z posledních dvou rovnic dostáváme $|PS|^2 - |ST|^2 = |PS|^2 - r^2$ a odtud $|ST| = r = |SA| = |SB|$. *Poznámka* K řešení lze také použít rotačního paraboloidu P s ohniskem A a řídící rovinou ρ. Naše elipsa je pak průnikem paraboloidu P a roviny σ. Můžeme si na základě toho všimnout, že elipsy ležící na rotačním paraboloidu se promítají kolmo na roviny kolmé k ose paraboloidu do kružnic.

Úloha 6.5. Nechť je B desetiprvková množina přirozených čísel, kde žádný prvek z B se nerovná součtu dvou prvků z B. Najděte nejmenší možnou hodnotu maximálního prvku B.

Řešení. Snadno nalezneme množinu $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$. Dokazujme sporem, že maximální prvek množiny B bude vždy alespoň 19. Nechť $\{a_1, \dots, a_{10}\}$ splňuje zadání a $1 \leq a_1 < \cdots < a_{10} < 19$. Dále uvažme posloupnost $1 \leq a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < a_{10} - a_1 < 18$. Z podmínky ze zadání víme, že $a_i - a_1 \neq a_j$, $\forall j \in \{1, ..., 10\}$. Máme tedy 19 různých přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_2 - a_1, \dots, a_{10} - a_1$ menších než 19, spor.

Úloha 6.6. Máme 2018 ciferné číslo tvořené 1 šestkou a 2017 jedničkami v nějakém pořadí. V každém kroku prohodíme sousední jedničku a šestku. Může se nám podařit, že dostaneme čtyřikrát po sobě prvočíslo, vždy jiné?

Řešení. K vyřešení úlohy nám pomůžou kritéria dělitelnosti 7 a 13. Zkusme si rozdělit číslo na trojčíslí, sečíst sudá trojčíslí a odečíst od nich součet lichých trojčíslí (rozdělujeme odzadu, proto nejlevější trojčíslí jsou jen dvě číslice). Podle pozice číslice 6 dostáváme různé možnosti:

$$11 - 111 + 111 - \cdots - 611 + 111 - \cdots - 111 + 111 = 11 - 611 + 111 = -489$$

$$11 - 161 + 111 = -39$$

$$11 - 116 + 111 = -6$$

$$11 - 111 + 611 = 511$$

$$11 - 111 + 161 = 61$$

$$11 - 111 + 116 = 16$$

$$61 - 111 + 111 = 61$$

$$16 - 111 + 111 = 16$$

Vidíme, že druhý součet je dělitelný 13 a čtvrtý součet 7, tedy čísla s odpovídající pozicí šestky nejsou prvočísla. Dále je vidět, že ať vezmeme čtyři čísla, která vzniknou prohazováním šestky, alespoň jedno z nich bude ve tvaru odpovídajícím druhé nebo čtvrté možnosti a tedy nebude prvočíslo.

Úloha 6.7. Ukažte, že je celá část reálného čísla $(3 + \sqrt{5})^n$ lichá pro všechna přirozená n.

Řešení. Uvažme výraz $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. Z binomické věty ho můžeme rozložit na

$$3^n + 3^{n-1}\cdot\sqrt{5} + \cdots + 3\cdot\sqrt{5}^{n-1} + \sqrt{5}^n + 3^n + 3^{n-1}\cdot(-\sqrt{5}) + \cdots + 3\cdot(-\sqrt{5})^{n-1} + (-\sqrt{5})^n.$$

Členy se sudým exponentem u $\sqrt{5}$ se v tomto výrazu vyskytnou dvakrát a jsou to celá čísla (vždyť jsou tvaru $3^k 5^l$ pro $k, l \in \mathbb{N}$). Naopak členy s lichým exponentem u $\sqrt{5}$ se odečtou. Celý výraz je proto sudé číslo, označme $2m$. Jelikož $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$. Konečně $2m > 2m - (3-\sqrt{5})^n = (3+\sqrt{5})^n > 2m-1$, z čehož vyplývá $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor = 2m-1$ a to je liché číslo.