Řešení 5. série

NÁHODA

Úloha 5.1. Jednoho dne se naprostou náhodou stalo, že Ňouma potkal Koumu. A to nikde jinde než v bonbónovém krámku, kde byl Kouma na brigádě. Jelikož zrovna v krámku nebyli žádní zákazníci, tak se kluci rozhodli, že si budou hrát. Kouma má 8 červených a 8 modrých bonbónů. Všechny musí rozdělit do dvou misek. V každé misce musí být alespoň jeden bonbón, ale jinak je může rozdělit jakkoliv. Ňouma následně přijde, vybere si náhodně jednu misku (každou s 50% pravděpodobností) a z ní náhodně vytáhne jeden bonbón. Pokud je modrý, tak vyhrál, pokud je to červený tak prohrál. Jak může Kouma nejlépe rozdělit bonbóny a jaká je pak pravděpodobnost výhry?

Řešení. Hledáme rozložení, při kterém pravděpodobnost, že Ňouma vytáhne modrý bonbón, bude největší. Předpokládejme, že do misky A dal Kouma m modrých a c červených bonbónů, v misce B pak bude $8-c$ červených a $8-m$ modrých bonbónů. Pravděpodobnost, že si Ňouma vytáhne modrý bonbón z misky A, je $P_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{c+m}$ a z misky B je $P_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{8-m}{16-m-c}$. Pravděpodobnost Koumovy výhry je tedy

$$P = P_A + P_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{c+m} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8-m}{16-m-c}.$$

Pravděpodobnost P se budeme snažit maximalizovat.
Zřejmě pokud bude v některé misce stejně modrých bonbónů jako červených, bude jich stejně i v druhé misce a tedy $P = \frac{1}{2}$. Snadno ale najdeme vhodnější rozložení (např. že Kouma dá do misky B jediný modrý bonbón a $P = \frac{11}{15}$), tedy můžeme předpokládat, že v jedné misce je více modrých bonbónů a v druhé je více červených.
Nechť je tedy v misce A více červených než modrých, pak $P_A = \frac{m}{c+m}$, kde $m < c \leq 8$. Snažme se zatím maximalizovat P_A. Při daném c to uděláme tak, že k červeným bonbónům přihodíme co nejvíce modrých, což je $c-1$. Stačí nám nyní maximalizovat výraz o jedné proměnné m

$$\frac{m}{c+m} = \frac{m}{m+1+m} = \frac{m}{2m+1}$$

Po úpravě výrazu dostaneme:

$$\frac{m}{2m+1} = \frac{m}{2 \cdot (m+\frac{1}{2})} = \frac{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2 \cdot (m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

Od $\frac{1}{2}$ odečítáme zlomek, který má ve jmenovateli m, celý výraz tedy bude maximální, když m bude maximální, proto $m = 7$ a $c = 8$. V druhé misce pak bude jediný bonbón (modrý), a proto je $P_B = 1$, to zřejmě nemůže být vyšší.
Vidíme, že pro Koumu je nejlepší rozložení dát do jedné misky jediný modrý bonbón a zbylé bonbóny dá do druhé misky. Pravděpodobnost Koumovy výhry je pak rovna $\frac{11}{15}$.

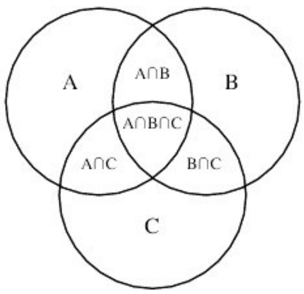
BRKOS Team 2017

Úloha 5.2. Když si dohráli s bonbóny, Kouma otevřel tajný šuplík, ve kterém byly cukrovinky, které nebyly určené k prodeji. A mezi nimi také tři nugátové osmistěnky popsané čísly 1 až 8. Hodíli všemi třemi najednou a vybrali největší číslo. Jaká je pravděpodobnost pro jednotlivá čísla?

Řešení. Hádžeme troma osmistenkami. Osmistenky majú 8^3 rôznych možností, ako dopadnúť. Jednotlivé možnosti budeme uvažovať ako usporiadané trojice. Označme A_x počet trojíc, v ktorých nie je číslo väčšie ako x. Na každej osmistenke môže padnúť číslo z intervalu $[1, x]$. Potom $A_x = x^3$. Všetky trojice, kde je x najvyššie číslo, sú započítané v A_x. Sú tam však naviac tie trojice, kde sú všetky čísla menšie než x. Ich počet je $A_{x-1} = (x-1)^3$. Takže počet možností, kedy x je najvyššie číslo (teda nepadne nič väčšie a nie je pravda, že padli iba menšie) je $A_x - A_{x-1} = x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$. Pravdepodobnosť, že padne jedna z tých možností, je $P_x = \frac{A_x - A_{x-1}}{8^3} = \frac{3x^2-3x+1}{8^3}$ pre $x \in [1, 8]$. Pre všetky iné x je $P_x = 0$.

Úloha 5.3. Kdesi v Hloupětíně si mezitím Matěj všiml, že pravděpodobnost, že Liběnka uvaří dobrý oběd, je 90 %, že se Kouma dobře vyspí 50 % a že večer nebude pršet 80 %. Také si ověřil, že každá dvojice z těchto tří jevů je na sobě nezávislá. Když to ukázal Liběnce, tak se zeptala "A jaká je pravděpodobnost, že v jeden den já uvařím dobrý oběd, Kouma se dobře vyspí a večer nebude pršet?" Na to Matěj pohotově odpověděl "To je prosté, je to 90 % · 50 % · 80 % = 36 %."Já si to nemyslím. Jak víš, že jsou všechny tři jevy nezávislé?" Rozhodněte spor mezi Liběnkou a Matějem.

Řešení. Tento příklad řešil, jestli nezávislost jevů po dvojici implikuje nezávislost všech jevů a tím pádem bychom mohli jevy násobit mezi sebou pro získání jejich průniku. Uvědomme si, že známe pravděpodobnosti jevů A, B, C a také pravděpodobnosti jevů A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C a chceme odvodit pravděpodobnost jevu A ∩ B ∩ C. Nejjednodušší je nakreslit si Viennův diagram, ze kterého je vidět, že známe pouze 6 proměnných, což nestačí pro výpočet všech neznámých. Takže správná odpověď je, že pravděpodobnost průniků všech tří jevů může být 36%, ale také nutně nemusí a ze zadaných informací to nemůžeme určit.



Pro lepší představu představím protipříklad s jinými čísly, na kterém je vše názorně vidět. Mějme tři čísla. Všechna tři byla vytvořena náhodným generátorem čísel, který s 50 % vytvoří 0 a 50 % vytvoří 1.

I: Pravděpodobnost čísla 1 je všude 50 %.

II: Pravděpodobnost dvou čísel 1 v předem vybrané dvojici je 25 %, takže můžeme říct, že jsou po dvojici nezávislé.

III: Pravděpodobnost 3 jedniček (průniku tří jevů) je 12,5 %, takže můžeme říct, jsou to nezávislé jevy.

Třetí číslo však můžeme vytvořit i jinak a to pomoci binární funkce XOR (její definice: XOR(0,0)=0; XOR(1,0)=1; XOR(0,1)=1; XOR(1,1)=0). V takovém případě platí I, II, ale už neplatí III. Pravděpodobnost průniků je dokonce 0 %. Jinou možností je zvolit negaci této funkce a znovu bude platit I, II, ale už ne III. Pravděpodobnost průniku bude 25 %. Vidíme, že v tomto příkladě při znalosti pravděpodobnosti všech tří jevů a informací, že jsou po dvojici nezávislé, tak nemůžeme určit kolik přesně bude pravděpodobnost průniků. Ta se bude pohybovat od 0 % až po 25 %.

Nyní vypočítáme jaká může být pravděpodobnost průniku všech tří jevů s hodnotami v zadání. Označíme si jev A, že Liběnka uvaží dobrý oběd, B jev, že se Kouma dobře vyspí a C jev, že nebude pršet. Dále si označíme P(A ∩ B ∩ C) = P(111); P(A ∩ B ∩ C') = P(110) atd. Z pravděpodobností jednotlivých jevů dostaneme 3 rovnice, například $P(A) = P(100) + P(101) + P(110) + P(111) = 90\%$ a z informace o nezávislosti dostaneme další 3 rovnice, například $P(A \cap B) = P(110) + P(111) = 45\%$. Máme 6 rovnic o 7 neznámých, tak si označíme $P(111) = x$ a vyřešíme tyto rovnice. Dostaneme:

$$\begin{aligned} P(000) &= 37\% - x \\ P(001) &= x - 32\% \\ P(010) &= x - 35\% \\ P(011) &= 40\% - x \\ P(100) &= x - 27\% \\ P(101) &= 72\% - x \\ P(110) &= 45\% - x \end{aligned}$$

Abychom nedostali všechny pravděpodobnosti do intervalu $\langle 0\%; 100\% \rangle$, musíme zvolit x v intervalu $\langle 35\%; 37\% \rangle$. Vidíme, že Matěj neměl pravdu, ale na druhou stranu se tolik nezmýlil.

Úloha 5.4. V bonbónovém krámku zatím sedí dva upatlaní kluci. Už stihli sníst spoustu sladkostí, v tom je zaujalo klubíčko n pendreků. Z něj trčí všech $2n$ konců. Kouma na to kouká a pak praví: „Hele Ňoumo, jaká je pravděpodobnost, že když postupně všechny konce spojíme dohromady (vždy po dvou), tak nám vznikne jeden velký pendrekový cyklus?“

Řešení. Máme n stejných pendreků, takže máme $2n$ konců. BÚNO vybereme jeden konec a ten spojíme s jedním ze $2n-1$ zbylých konců. S pravděpodobností $\frac{1}{2n-1}$ jsme spojili dva konce stejného pendreku a tím jsme zcela zamezili vytvoření jednoho velkého cyklu (za podmínky, že $n \neq 1$) a nemá cenu dále cokoliv řešit. V opačném případě s pravděpodobnosti $\frac{2n-2}{2n-1}$ spojíme dva konce dvou různých pendreků. Pro účely úlohy je nově vzniklá situace zcela ekvivalentní se stavem $n-1$ pendreků, protože nezáleží ani na délce pendreků ani na pořadí jejich spojení. V dalším spojení máme šanci $\frac{2(n-1)-2}{2(n-1)-1}$, že spojíme konce dvou různých pendreků a takto musíme pokračovat až do stavu, že máme pouze dva konce jednoho dlouhé propojeného pendreků. V takovém případě máme jistotu, že spojíme dva konce ze stejného pendreku, což je v tomto případě žádoucí jev. Takže pravděpodobnost, že se nám podaří pospojovat pendreky do jedné dlouhé smyčky, je součin všech pravděpodobností $\frac{2(n-m)-2}{2(n-m)-1}$, kde m je počet předcházejících spojení a jde postupně od 0 po $n-1$.

Dále už je to jen o úpravě výrazů, což nebylo nutně potřeba udělat:

$$P = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = 2^{2n-2} \cdot \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$$

Konečný výraz dává správné řešení i pro případ $n = 1$.

Úloha 5.5. Kluky už neuvěřitelně bolelo břicho, a tak už jen leželi na zemi jako dva vyvržení vorvani a bavili se spolu o tom, kolik toho snědli. Kouma říká, že toho určitě bylo $2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$. Ňouma jen kouká do stropu a přitakává. Pak ho napadlo, jaká je asi poslední číslice takového čísla?

Řešení. Pro zjištění poslední číslice tohoto čísla nám stačí zjistit zbytek po celočíselném dělení 10, tedy kolik je $2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}} \mod 10$. To je totéž, jako $(202 \cdot 10 - 3)^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}} \mod 10$, neboli $(-3)^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}} \mod 10$. $(-3)^2 = 9$, $9 \mod 10 = -1$. S využitím této skutečnosti můžeme předchozí výraz přepsat jako $(-1)^{\frac{1}{2}\cdot 2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$. 2016 je dělitelné 4, tudíž 2016 na libovolný kladný exponent i po vydělení dvěma bude sudé číslo. -1 na sudý exponent je 1. Proto poslední číslice tohoto čísla bude 1.

Úloha 5.6. Liběnka ukončila rozhovor s Matějem a šla do svého pokojíčku. Co ji ale překvapilo, na její tabuli jí Matěj připravil tyto rovnice a pod nimi nápis: „Najdi všechna kladná a,b,c,d splňující:“

$$a + b < c + d$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd$$

$$(a + b)cd < (c + d)ab$$

Řešení. Ukážeme, že nerovnosti nesplní žádná čtveřice kladných čísel. (Sporem:) Nechť a, b, c, d jsou kladná a splňují zadané nerovnosti, pak platí:

$$acd + bcd + ab^2 + b^3 = (a + b)cd + \underline{(a + b)}b^2 \overset{(1)}{<} (a + b)cd + \underline{(c + d)}b^2$$

$$\underline{(a + b)cd} + (c + d)b^2 \overset{(2)}{<} \underline{(c + d)ab} + (c + d)b^2 = b(c + d)(a + b)$$

$$b\underline{(c + d)(a + b)} \overset{(3)}{<} b\underline{(ab + cd)}b = ab^2 + bcd$$

Porovnáním prvního a posledního výrazu dostáváme

$$acd + bcd + ab^2 + b^3 < ab^2 + bcd \Longrightarrow acd + b^3 < 0,$$

což je spor s kladností čísel a, b, c, d. Nerovnosti tedy nesplní žádná kladná čísla.

Úloha 5.7. Liběnku takovéto úkoly moc baví, tak si rychle běžela vyprosit další. V prostoru jsou dány body A, A', B, B', C, C' tak, že přímky AA', BB', CC' jsou rovnoběžné ale neleží v jedné rovině. Je-li X je průsečík rovin $A'BC, AB'C, ABC'$ a Y průsečík rovin $AB'C', A'BC', A'B'C$, pak jsou přímky XY a AA' rovnoběžné. Dokaž to.

Řešení. Nechť se $B'C$ a BC' protínají v S. Pokud nastane $B'C \parallel BC'$, pak zvolme za S takový bod, že $AS \parallel B'C$. Potom je $X \in AS = ABC' \cap AB'C$ a $Y \in A'S = A'BC' \cap A'B'C$. Odtud plyne, že přímka XY leží v rovině $AA'S$, která je rovnoběžná s přímkou BB'. Symetricky dojdeme k tomu, že XY leží v rovině $BB'T$ (kde T získáme stejně jako S). Nutně

XY je průsečnice $BB'T$ a $AA'S$. Jelikož je AA' rovnoběžná s oběma rovinami, pak je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

Jiné řešení: Označme S_A, S_B, S_C středy úseček AA', BB', CC'. Zavedeme soustavu souřadnic s počátkem v bodě S_A a s bázovými vektory S_AA, S_AS_B, S_AS_C. V této soustavě jsou dvojice A, A'; B, B'; C, C' symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$. Proto i dvojice rovin $A'BC$, $AB'C'$; $AB'C$, $A'BC'$; ABC', $A'B'C$ jsou symetrické podle stejné roviny a tedy i bod X s bodem Y. To znamená, že XY je rovnoběžná s AA'.