Řešení 4. série

Binární operace

Úloha 4.1. V Hloupětínské jaderné elektrárně došlo jednoho dne k úniku radioaktivního záření. Obyvatelé byli pro tento případ kvalitně vyškoleni v obraně proti zákeřným částicím, takže kromě Liběnky, Koumy, Ňoumy a Matěje, kteří hráli karty poblíž reaktoru, se nikomu nic nestalo. Tito čtyři měli neobyčejné štěstí. Nejenom, že neutrpěli žádná zranění, ale jejich smysly se zbystřily a jejich jména už nezněla stejně jako předtím. Nyní to byli Srděnka, Kár, Křížnel a Pikant a stál před nimi nový úkol - opravit reaktor. Žádnému z hrdinů se moc nechtělo, protože všichni chtěli začít objevovat svoje superschopnosti. Naštěstí Křížnel zjistil, že umí přivolat tabuli a křídy, a tak přišel s nápadem:

„Na tabuli nakreslíme vedle sebe symboly ♡, ♢, ♣ a ♠. Operace • zadaná tabulkou bude spočívat v tom, že smažeme první a druhý symbol z leva a místo nich nakreslíme symbol jim odpovídající. Operaci provedeme celkem třikrát, na tabuli pak zůstane pouze jediný symbol. Čí symbol to bude, ten musí reaktor opravit.“ Křížnel se nabídl, že tabulku operace • vymyslí a ostatní se shodli, že tabulka musí splnit následující podmínky:

(i) tabulka bude obsahovat stejný počet ♡, ♢ a ♠
(ii) ♣ je v tabulce více než jiného symbolu
(iii) operace • je komutativní
(iv) na diagonále musí být symboly ♣ (viz. tabulka)

•	♡	♢	♣	♠
♡	♣			
♢		♣		
♣			♣	
♠				♣

Podaří se Křížnelovi doplnit tabulku tak, že při libovolném počátečním pořadí symbolů na tabuli nezůstane nikdy symbol ♣ jako poslední, a Křížnel se tak vyhne povinnostem? Najděte alespoň jeden způsob, jak tabulku doplnit.

Řešení. Z podmínky komutativity operace musí být tabulka doplněna symetricky, všech symbolů tak bude sudý počet. Z podmínky *(i)* a *(ii)* potom dostáváme, že každý z symbolů ♡, ♢ a ♠ musíme do tabulky doplnit právě dvakrát. Tabulku lze doplnit následujícím způsobem:

•	♡	♢	♣	♠	
♡	♣	♣	♡	♣	
♢	♣	♣	♢	♣	
♣	♡	♢	♣	♠	
♠	♣	♣	♠	♣	

BRKOS Team 2017

Ověříme, že skutečně splňuje zadání.
Operace má dvě hezké vlastnosti:
(i) $\clubsuit \bullet X = X$, kde X zastupuje libovolný symbol.
$(ii) Y \bullet Z = \clubsuit$ kde Y, Z jsou symboly různé od $\clubsuit$.
Můžeme tedy reprezentovat symboly různé od $\clubsuit$ znakem $\square$. Nyní zbývá vyšetřit jen čtyři případy pořadí symbolů na tabuli.

1. Kříže jsou na 1. pozici

   $\clubsuit\square\square\square = \square\square\square = \clubsuit\square = \square$

2. Kříže jsou na 2. pozici:

   $\square\clubsuit\square\square = \square\square\square = \clubsuit\square = \square$

3. Kříže jsou na 3. pozici:

   $\square\square\clubsuit\square = \clubsuit\clubsuit\square = \clubsuit\square = \square$

4. Kříže jsou na 4. pozici:

   $\square\square\square\clubsuit = \clubsuit\square\clubsuit = \square\clubsuit = \square$

Ukázali jsme, že nikdy nezbyde symbol $\clubsuit$.

Úloha 4.2. Křížnel však zanedlouho začal znovu škodit. Ukradl všechna celá čísla a zamčel je ve svém doupěti. Hrdinové se vydali čísla zachránit. Srděnka si ale uvědomila:„Všechna čísla přece zachránit nemůžeme, vždyť je jich nekonečně mnoho!“ Na to jí odpověděl Kár: „Neboj, stačí zachránit jen pár kladných čísel. Vymyslel jsem operaci $\diamondsuit$, která dvěma celým číslům x a y přiřadí číslo $x \diamondsuit y = x + xy - 2y$.“ Kolik nejméně musí zachránit kladných celých čísel $x_1, x_2, \cdots, x_n$, že pomocí nich a opětovného používání Károvy operace $\diamondsuit$ lze vytvořit libovolné celé číslo? Operovat můžeme na libovolném počtu kopií $x_1, x_2, \cdots, x_n$ v libovolném pořadí a při libovolném uzávorkování.

Řešení. Máme takový skvělý tip, že bychom mohli matematickou indukcí zkusit dokázat následující tvrzení:

$$a \clubsuit 0 = 0 \clubsuit a = (0 \clubsuit 0) + a;\ a \in N_0$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí, ta má 2 kroky:

1. V prvním kroku zjišťujeme, jestli to platí pro nejmenší povolené a:

   (a) do (i) dosadíme $x = 0$:
   $1 \clubsuit 0 = (0 \clubsuit 0) + 1$

   (b) do (ii) dosadíme $y = 0$:
   $0 \clubsuit 1 = (0 \clubsuit 0) + 1$

   $\Rightarrow 1 \clubsuit 0 = (0 \clubsuit 0) + 1 = 0 \clubsuit 1 \Rightarrow$ pro $a = 0$ to platí $\blacksquare$

2. V druhém kroku předpokládáme, že dané tvrzení platí pro a a chceme dokázat, že za této podmínky to platí i pro $a + 1$:

   Předpoklad:

   $$a \clubsuit 0 = 0 \clubsuit a = (0 \clubsuit 0) + a;\ a \in N_0$$

(a) do (i) dosadíme $x = a$:
$(a+1) \clubsuit 0 = (0 \clubsuit a) + 1 = [(0 \clubsuit 0) + a] + 1 = (0 \clubsuit 0) + (a+1)$

(b) do (ii) dosadíme $y = a$:
$0 \clubsuit (a+1) = (x \clubsuit 0) + 1 = [(0 \clubsuit 0) + a] + 1 = (0 \clubsuit 0) + (a+1)$

$\Rightarrow (a+1) \clubsuit 0 = (0 \clubsuit 0) + (a+1) = 0 \clubsuit (a+1)$

$\Rightarrow$ Když naše tvrzení platí pro a, pak platí i pro $a+1$ ■

Teď přichází na řadu třetí podmínka (iii).

Matematickou indukcí se tentokrát budeme snažit dokázat, že platí nasledují tvrzení ($k \in N_0$ je konstanta):

$$a \clubsuit (a+k) = a + k + (0 \clubsuit 0);\ \ a \in N_0$$

1. $a = 0$:
   $0 \clubsuit k = k + (0 \clubsuit 0)$ – platí ■

2. Předpoklad:
   $$a \clubsuit (a+k) = a + k + (0 \clubsuit 0);\ \ a \in N_0$$
   Když do (iii) dosadíme $x = a$ a $y = a + k$, dostaneme:
   $(a+1) \clubsuit (a+k+1) = (a \clubsuit (a+k)) + 1 = a + k + (0 \clubsuit 0) + 1 = (a+1) + k + (0 \clubsuit 0)$
   $\Rightarrow$ Když naše tvrzení platí pro a, pak platí i pro $a+1$ ■

Analogicky dokážeme, že platí $(a+k) \clubsuit a = a + k + (0 \clubsuit 0);\ \ a \in N_0$

Konečně se dostáváme k poslednímu puclíku skládanky – a tím je $2016 \clubsuit 2061 = 6210$. Díky této rovnosti získáme to, co potřebujeme na všechny výpočty – a to je hodnota výrazu $0 \clubsuit 0$.

Když dosadíme do rovnice $a \clubsuit (a+k) = a + k + (0 \clubsuit 0)$ hodnoty $a = 2016$ a $k = 2061 - 2016 = 45$, získáme rovnost $2016 \clubsuit 2061 = 2061 + (0 \clubsuit 0)$

$\Rightarrow 2061 + (0 \clubsuit 0) = 6210 \Rightarrow (0 \clubsuit 0) = 6210 - 2061 = 4149$

Tímto dostaneme $(a+k) \clubsuit a = 2601 \clubsuit 1620 = a + k + (0 \clubsuit 0) = 1620 + 981 + 4149 = 6750$.

Úloha 4.3. Vchod do Křížnelova doupěte bránilí zlí Operantauři, které Křížnel stvořil. Měli ale slabost pro nevídané matematické dovednosti. „Necháme vás projít, jen když nám zvládnete dokázat jednu maličkost. Nechť $\circledast$ je binární operace na konečné množině M splňující následující:

(i) $\circledast$ je komutativní

(ii) v M existuje prvek p takový, že pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \circledast x = p$

(iii) pro každé $x, y \in M$ existuje nejvýše jedno $z \in M$ tak, že $x \circledast z = y$

Nechť $n > 2$ je počet prvků M. Dokažte nám, že taková operace existuje pro nekonečně mnoho n."

Řešení. Po chvilce hraní si napíšeme, jaké výsledky nám operace dá pro různé dvojice čísel vzhledem ke zbytku vstupů a výstupu po dělení trojkou. Můžeme to zapsat pomocí tabulky:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

Do tabulky jsme zakódovali, že např. když za x dosadíme *libovolné* číslo dávající po dělení třemi zbytek 1 a za y libovolné číslo dělitelné třemi, bude výsledek dávat zbytek 1 po dělení třemi. Pozorným pohledem z tabulky vyčteme, že číslo dávající zbytek 2 po dělení třemi nelze získat bez použití čísla, které dává také zbytek 2 po dělení třemi. Musíme tedy zachránit alespoň jedno číslo dávající zbytek 2 po dělení třemi. Druhým pohledem zjistíme, že pouze generátor dávající zbytek 2 po dělení třemi, nám nikdy nevygeneruje např. číslo dělitelné třemi, potřebujeme tedy alespoň dvě čísla.
Ukažme, že pomocí 1 a 2 umíme zachránit všechna celá čísla.

$$1 \circ 1 = 0$$

$$1 \circ 1 = -1$$

$$0 \circ 1 = -2$$

Dále budeme postupovat třeba indukcí. Umíme již tedy vytvořit čísla -2, -1, 0, 1, 2 Předpokládejme, že už jsme vytvořit všechna čísla splňující $-2n \leq x \leq 2n$, kde n je přirozené číslo, a dokažme, že pak umíme vytvořit všechna čísla splňující $-2(n+1) \leq x \leq 2(n+1)$, tedy čísla $-2n-2, -2n-1, 2n+1, 2n+2$.

$$-2n - 2 = 0 \circ (n+1)$$

$$-2n - 1 = 0 \circ (n+1)$$

$$-2n + 1 = 1 \circ (-2n)$$

$$-2n - 2 = 0 \circ (-n-1)$$

Umíme tedy vytvořit všechna celá čísla pouze pomocí 1 a 2 a také víme, že méně čísel nestačí.

Úloha 4.4. Poté co se hrdinové dostali dovnitř, šli temnou chodbou. Kár si zpíval a Pikanta trochu mrzelo, že se v příběhu objeví už jen jednou. „Podívejte, to je zvláštní pavučina!“ vyhrkl Kár. Pavučina měla tvar obdelníku s oběma úhlopříčkami. „Víte, že když pavouk sedí v kterémkoliv bodě na některé ze stran obdélníku, tak součet kolmých vzdáleností toho bodu od obou úhlopříček je vždy stejný?“ Ukažte, že má Kár pravdu.

Řešení. Pro znalce grup lze řešení napsat na jeden řádek - pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ splňuje operace grupy $\mathbb{Z}_2^n$ podmínky zadání. Pro neznalce je tu předchozí věta podrobně vysvětlena:

Nechť M je množina n-tic složených pouze z 0 a 1. Takových n-tic je 2^n, proto $|M| = 2^n$. Zavedeme na M binární operaci sčítání n-tic následovně: $(a_1, \ldots, a_n) \oplus_2 (b_1, \ldots, b_n) = ((a_1 + b_1) \mod 2, \ldots, (a_n + b_n) \mod 2)$, tedy sečteme n-tice po složkách a v každě složce vždy napíšeme jen zbytek po dělení dvojkou. Tato operace je jistě komutativní, $(a_1, \ldots, a_n) \oplus_2 (a_1, \ldots, a_n) = (2a_1, \ldots, 2a_n) = p = (0, \ldots, 0)$ a zároveň z jedné n-tice uděláme jinou jen jediným způsobem.

Úloha 4.5. Poté co se hrdinové dostali dovnitř, šli temnou chodbou. Kár si zpíval a Pikanta trochu mrzelo, že se v příběhu objeví už jen jednou. „Podívejte, to je zvláštní pavučina!“ vyhrkl Kár. Pavučina měla tvar obdelníku s oběma úhlopříčkami. „Víte, že když pavouk sedí v kterémkoliv bodě na některé ze stran obdélníku, tak součet kolmých vzdáleností toho bodu od obou úhlopříček je vždy stejný?“ Ukažte, že má Kár pravdu.

Řešení. Při řešení se dalo šikovně využívat osové souměrnosti podle strany, na které pavouk seděl, a toho, že obraz jedné z úhlopříček pak bude rovnoběžný s druhou úhlopříčkou. Také jsme mohli počítat obsahy trojúhelníků, u kterých jsme věděli, že součet jejich obsahů se zachovává, nebo jsme si vzdálenosti od uhlopříček mohli vyjádřit pomocí goniometrických funkcí.
Při označení obdélníku $ABCD$, nechť pavouk sedí v bodě P na straně AB. Označme úhlopříčky e, f a paty kolmic z bodu P na ně E, F, dále označme úhel, který úhlopříčky svírají se stranou AB jako α. Pak $|PE| + |PF| = |AP| \cdot sin(\alpha) + |PB| \cdot sin(\alpha) = |AB| \cdot sin(\alpha) = konst$. Bude-li pavouk sedět na straně $|BC|$, bude součet vzdáleností roven $|BC| \cdot cos(\alpha)$. Víme však, že platí $\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{|BC|}{|AB|}$, proto je součet vzdáleností od úhlopříček konstantní, ať už je pavouk kdekoli na obvodu.

Úloha 4.6. Jak šli, Pikant byl stále smutnější a v tento moment se dokonce rozbrečel. Ostatní se ale zaradovali, neboť uviděli na zemi ležet dvojici reálných čísel $(a_{100}, b_{100}) = (2, 4)$. Kousek dál byla (a_{99}, b_{99}) a za ní spousta dalších. Byla jich celá posloupnost. Také si všimli, že posloupnost splňuje $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\sqrt{3}a_n - b_n, \sqrt{3}b_n + a_n)$ pro $n \geq 1$. Jaký je součet $a_1 + b_1$?

Řešení. Napřed zjistime rekurentní vztah "zpět", tedy jak z (a_n, b_n) určit (a_{n-1}, b_{n-1}). To provedeme vyřešením soustavy 2 lineárních rovnic o dvou neznámých (a_{n-1}, b_{n-1}):

$$a_{n+1} = \sqrt{3}a_n - b_n$$
$$b_{n+1} = \sqrt{3}b_n + a_n$$

Dostáváme jediné řešení:

$$a_n = \frac{\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}}{4}$$
$$b_n = \frac{\sqrt{3}b_{n+1} - a_{n+1}}{4}$$

Dosadíme-li 5krát do těchto dvou vzorců (tedy za a_{n+1} dosadíme $\frac{\sqrt{3}a_{n+2}+b_{n+2}}{4}$ atd.) výrazy se náhle zjednoduší:

$$a_n = -\frac{1}{2^6}a_{n+6}$$
$$b_n = -\frac{1}{2^6}b_{n+6}$$

Tedy platí:

$$a_n = \frac{(-1)^k}{2^{6k}}a_{n+6k}$$
$$b_n = \frac{(-1)^k}{2^{6k}}b_{n+6k}$$

Tedy dostáváme, že

$$a_4 = \frac{1}{2^{96}} a_{100} = \frac{1}{2^{95}}$$
$$b_4 = \frac{1}{2^{96}} b_{100} = \frac{1}{2^{94}}$$

Nyní stačí dopočítat (a_1, b_1). To můžeme buď tupě dosazovat, nebo použijeme mezivýpočet, který jsme dostali při odvozování vzorce. Ať tak či tak nám vyjde:

$$a_1 = \frac{2}{2^{98}}$$
$$b_1 = \frac{-1}{2^{98}}$$

Hodnota hledaného součtu je tedy:

$$a_1 + b_1 = \frac{1}{2^{98}}$$

Úloha 4.7. Než došli k poslední dvojici, Srděnka zjistila, že ji superschopnosti pomalu opouští. Stejně tak Kár. Když došli k poslední dvojici, seděl tam schopností a zloby zbavený Křížnel. Všechna čísla už pustil a jako omluvu dokázal pro Srděnku jedno zajímavé tvrzení. „Den mi připadá kvadratický, pokud jsme na světě k dní a existuje takové celé číslo a, že $2017 \mid k - a^2$. Jiné dny jsou nekvadratické. Srděnko, ty jsi o n dní mladší. Nastane někdy den, který bude pro nás oba kvadratický nebo pro oba nekvadratický? Dokázal jsem, že tomu tak určitě nastane.“ Dokážete to taky?

Řešení. Snadno dokážeme, že pro všechna n existuje celé x, že $2017 \mid 2x + 1 - n$. Výraz $2x + 1$ nebývá totiž všech lichých čísel a $2x + 1 - 2017$ zase všech sudých (zřejmě navíc $2017 \mid 2x + 1 - 2017 \iff 2017 \mid 2x + 1$). Zejména tedy nabyde i čísla n.
Zvolíme-li nyní $k = (x + 1)^2$, $a = x + 1$, $b = x$, tak jsme hotovi. Vskutku $2017 \mid k - a^2 = 0$ a $2017 \mid k - b^2 - n = 2x + 1 - n$.