Řešení 3. série

Kombinatorická geometrie

Úloha 2.1. Henry vzal své dvě ratolesti na výlet. Jako ostatně každý jejich výlet, i tento začal u dobrého jídla. Objednali si obrovskou pizzu a než se Henry stihl pohodlně usadit, Liběnka s Matějem už měli většinu pizzy v sobě a na talíři zůstal jen jeden kousek ve tvaru trojúhelníku (jak jinak), na němž bylo 9 (fakt malých, asi jako bod) oliv. A tak Henry, aby na něj zbylo alespoň něco, úkoloval své děti: „Dokažte, že spojením některých tří oliv získáte trojúhelník o obsahu nanejvýš 1/4 zbylé pizzy.“ Dokážete to taky?

Řešení. Vyjdeme z toho, že trojúhelník lze rozdělit pomocí jeho středních příček na 4 shodné menší trojúhelníky. Každý z těchto menších trojúhelníků pak má obsah roven $\frac{1}{4}$ celého trojúhelníku. Z Dirichletova principu pak platí, že v alespoň jednom malém trojúhelníku jsou alespoň 3 body. Spojením těchto 3 bodů pak dostáváme trojúhelník, jehož obsah není větší než obsah malého trojúhelníku, a tedy je menší nebo roven $\frac{1}{4}$ celého trojúhelníku.

Tím jsme ale dokázali zadání.

Úloha 2.2. Po dobrém jídle mohla rodinka konečně vyrazit na výstavu o Egyptě, která se právě konala v nedalekém Lenošíně. Šli a šli a šli a najednou… Matěj se zastavil. Zaujal ho kanál. On to totiž nebyl ledajaký kanál! Byla to celočíselná mřížka a na ní 5 žabek. „Hele Liběnko!“ zakřičel Matěj. „Na tom kanálu jsou žabky rozsazené tak, že jejich spojením dostaneme konvexní pětiúhelník!“ „To je toho,“ ušklíbla se Liběnka koukajíc na roztomilé obojživelníky, „mnohem zajímavější je, že jeho obsah je alespoň 5/2.“ Dokážete dokázat Liběnčino tvrzení?

Řešení. Uvádíme vzorové řešení vycházející z řešení Ondry Svobody.

Díky Dirichletovu principu víme, že některý ze středů spojnic nějakých dvou vrcholů pětiúhelníku má celočíselné souřadnice. Pojmenujeme ho X. Protože je pětiúhelník konvexní, musí ležet buď úplně uvnitř pětiúhelníku, nebo na některé jeho straně.

X leží uvnitř pětiúhelníku

Spojím tento bod s vrcholy pětiúhelníku, čímž vytvořím pět nezdegenerovaných trojúhelníků s celočíselnými vrcholy. Každý takový trojúhelník má obsah alespoň $\frac{1}{2}$. Dohromady má tedy pětiúhelník obsah alespoň $\frac{5}{2}$.

X leží na nějaké straně pětiúhelníku, označme ji a.

Tato strana má délku alespoň 2. Všechny ostatní body leží pouze na jedné z polorovin od této strany. dále víme, že žádné tři vrcholy pětiúhelníku neleží na jedné přímce. Znovu použijeme Dirichletův princip, tím zjistíme, že zbývající tři vrcholy leží alespoň na dvou přímkách rovnoběžných se stranou a. Tedy vzdálenost alespoň jednoho bodu od strany a je alespoň 2. Trojúhelník určený tímto bodem a stranou a má obsah alespoň $\frac{2*2}{2} = 2$. Díky konvexnosti pětiúhelníku je tento trojúhelník jeho podmnožinou, proto je obsah pětiúhelníku roven obsahu trojúhelníku a alespoň jednoho dalšího útvaru. Nejmenší útvar s vrcholy v celočíslné mřížce má obsah $\frac{1}{2}$. Celkem má tedy pětiúhelník obsah alespoň $\frac{5}{2}$.

Úloha 2.3. Po zoologickém zážitku pokračovali dál. Cesta ubíhala pomalu, tak jako správní turisté hráli různé hry. Dokonce s sebou měli i cestovní šachovnici. Henry se na ni zamyšleně zadíval a pak dal dětem tuto hádanku: „Ukažte, že šachovnice $n \times n$ lze pokrýt dílky $1 \times m$ právě tehdy, když m dělí n.“

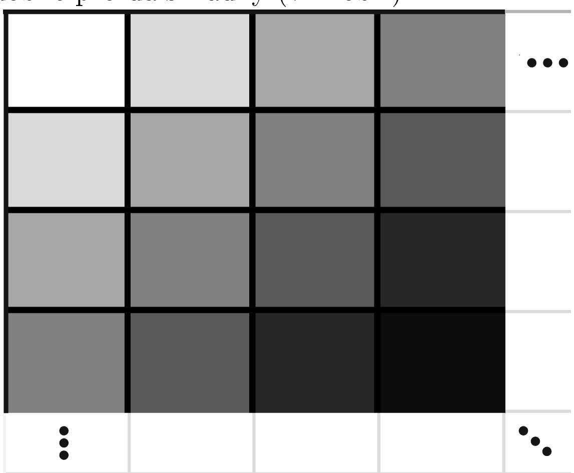
Řešení. V zadání se po nás chce dokázat ekvivalenci výroků: šachovnice $n \times n$ lze pokrýt dílky $1 \times m \Leftrightarrow m$ dělí n

Dokážeme tedy dvě implikace:

1) " $\Leftarrow$ " je triviální, neboť stačí v jednom řádku naskládat $k = \frac{n}{m}$ dílků za sebe, které řádek vyplní. Zbylých $n - 1$ řádků vyplníme stejně.

2) " $\Rightarrow$ " Budeme dokazovat ekvivalentní tvrzení, které dostaneme obměnou implikace: m nedělí $n \Rightarrow$ šachovnice $n \times n$ lze pokrýt dílky $1 \times m$

Uvažme obarvení m barvami tak, že políčka prvního řádku budou postupně obarvena barvami $1, 2, \ldots, m-1, m, 1, \ldots,$ políčka druhého řádku barvami $2, \ldots, m-1, m, 1, \ldots,$ podobně pro další řádky (viz. obr.)



Libovolně položený dílek pak zakrývá každou barvu právě jednou. Jestliže je tedy šachovnice pokrytá, pak musí obsahovat stejný počet dílků od každé barvy, ekvivalentně: šachovnice neobsahuje stejný počet dílků od každé barvy, pak nejde pokrýt. Stačí tedy ukázat, že pokud m nedělí n, pak neobsahuje stejný počet dílků od každé barvy (a tedy nejde pokrýt). Nechť m nedělí n, tj. $n = a \cdot m + b$, kde a, $b \in \mathbb{N}$ a $b < m$. Vezměme prvních $a \cdot m$ horních řádků. V těch je jistě všech barev stejně. Ve zbylých b řádcích vezměme prvních $a \cdot m$ sloupců zleva. V těch je také všech barev stejně. Ve zbylém čtevrci je b^2 políček, přitom políček jedné z barev bude ve čtverci b (úhlopříčka vedoucí zespodu zleva). Protože máme m barev a $m \cdot b < b^2$, nemůže být ve čtverci stejný políček políček od každé barvy, tedy ani v celé šachovnici.

Úloha 2.4. Henry s Matějem a Liběnkou konečně dorazili na výstavu. Vstupné bylo dobrovolné, proto lidé zanechávali své mince na kruhovém stolu s průměrem dva metry. Liběnka si všimla, že je na něm přesně 60 mincí libovolně rozmístěných. „Hmmmm. . . “, pomyslela si, „teď už jen dokázat, že existuje na okraji stolu takový bod, že součet jeho vzdáleností od středů všech 60 mincí je menší nebo roven 80 m.“

Řešení. Do kružnice určující kruh vepíšeme rovnostranný trojúhelník PQR. Jestliže dokážeme pro každý bod X uvnitř kruhu nerovnost $|PX| + |QX| + |RX| \leq 4$, tak sečtením 60 nerovností získáme, že součet vzdáleností bodů uvnitř kruhu k bodům P, Q, R je ≤ 240. Z toho vyplývá, že součet vzdáleností všech bodů ležících uvnitř kruhu pouze k některému jedinému z bodů P, Q, R je menší nebo roven 80. Tedy alespoň jeden z bodů P, Q, R má požadovanou vlastnost.

Díky symetrii můžeme řešit pouze případ, kdy X leží ve výseku mezi body P a Q. Uvažme bod Q' ležící na polopřímce PX mimo úsečku PX, tak aby $|XQ| = |XQ'|$. Úhel

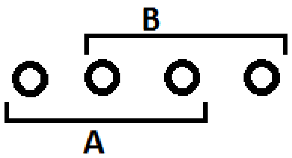
QXQ' je nanejvýš 60 stupňů, proto je úhel $XQQ' = XQ'Q$ alespoň 60 stupňů, proto Q' leží uvnitř kruhu, proto je $|PX| + |QX| = |PX| + |Q'X| \leq 2$.

Zřejmě platí $|RX| \leq 2$, dohromady tedy $|PX| + |QX| + |RX| \leq 4$.

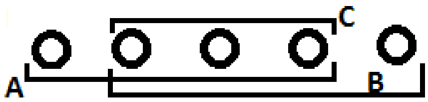
Úloha 2.5. Další výstava byla věnovaná kouzelnému světu pohádek, což bylo něco pro Liběnku. Matěj se tvářil znuděně, ale ožil, hned jak uviděl voskové figuríny sedmi trpaslíků. Stáli totiž v řadě "cik-cak", vyšší, nižší, atd. Obrátil se na Liběnku: „Mám pro tebe příklad, který nespočítáš. Sedm trpaslíků jde v řadě do dolu, a to tak, že výška žádných tří po sobě jdoucích trpaslíků netvoří rostoucí posloupnost. Trpaslíci jsou po dvou různě vysocí a nechce se jim chodit v pořadí, které již jednou použili. Kolik dnů jim to vydrží? A co když se přidá Sněhurka?"

Řešení. Spočítejme raději opačný jev, tedy počet takových seřazení trpaslíků, že některí tři z nich tvoří rostoucí posloupnost. Výsledek pak odečteme od celkové počtu možných seřazení - $7! = 5040$. Než se navíc vrhneme na 7 trpaslíků, rozmysleme úlohu pro menší počet.

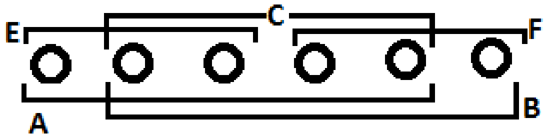
Kdyby byli trpaslíci 3, tak existuje jen 1 rostoucí seřazení.



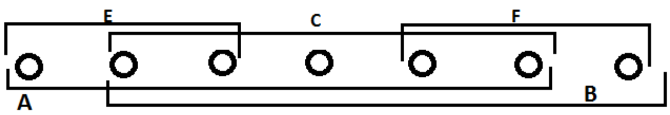
Pro 4 trpaslíky máme dvě možnosti. Buď bude trojice roustoucích trpaslíků na pozici A nebo na pozici B, trpaslíky pro pozici A vyberem 4 způsoby a na seřazení máme 1 možnost, stejně tak pro B. Tedy $4 + 4 = 8$. Dále odečtu případ, kdy je trojice na obou pozicích, ty jsem totiž započítal dvakrát. Ten je jen jeden. Celkem $8 - 1 = 7$.



Opakujme postup pro 5 trpaslíků. Buď je zakázaná trojice na pozici A nebo B a odečtem případ, kdy je na obou - tj. na pozici C. Tedy $5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 1 = 50$.



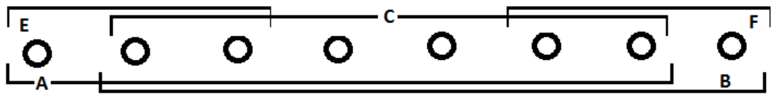
Pro šest trpaslíků se nám to už komplikuje ale nemějme strach. Zase máme dvě pozice A a B. Počet seřazení s trojicí na pozici A je $6 \cdot 50$, stejně tak B. Odečtu případy, kdy jsou trojice na obou pozicích, ty jsou tentokrát dva. Jednak ty co mají trojici na C a jednak ty co mají dvě trojice na E a F. Prvních je $6 \cdot 5 \cdot 7$. Druhých je $\binom{6}{3}$ (právě tolik je možností je pro E a pro F mi zbývá jen jedna). Dostávám $6 \cdot 50 + 6 \cdot 50 - 6 \cdot 5 \cdot 7 - \binom{6}{3} = 370$. Tentokrát jsem ale odečetl případ, kdy je trojice na všech pozicích dvakrát (jednou za C a jednou za E+F). Ten je jeden - všech šest trpaslíků seřazených v rostoucím pořadí. Celkem $370 + 1 = 371$.



Konečně máme 7 trpaslíků! Teď už jsme plně připraveni a vytrénováni. Začneme stejně. $7{\cdot}371$ pro A a pro B. Odečteme seřazení s trojicí na C, těch je $7{\cdot}6{\cdot}50$. Dále odečteme seřazení se zakázanou trojicí na E i F - těch je $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}$. Zatím máme $7{\cdot}371+7{\cdot}371-7{\cdot}6{\cdot}50-\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3} = 2954$. Zase jsme ale odečetli dvakrát ta vykutálená seřazení společná pro C a $E+F$. Kolik jich je? No to jsou ta seřazení, která obsahují napřed trojici rostoucích trpaslíků a pak čtveřici nebo naopak. Ty snadno spočítáme. Těch je celkem $\binom{7}{4}+\binom{7}{4}-1$ (1 protože sedmici seřazených trpaslíků započítávám dvakrát) . Celkem tedy máme $2954+2\cdot\binom{7}{4}-1 = 3023$.

Pro ty co už ztratili nervy můžeme říct, že hledaný počet je $5040-3023 = 2017$.

Pro odhodlané máme nachystanou sněhurku.



Jedeme podle našeho receptu. Pro A a B máme obdobně $8\cdot 3023$ možností. Pro seřazení s trojicí na C máme $8\cdot 7\cdot 371$. Seřazení s trojicí na E a F je $\binom{8}{3}\binom{5}{3}\cdot 2$. Nyní opět spočítejme počet společný seřazení pro dvě předchozí formace. To jsou ty co mají na pozici E trojici a nakonci čtveřici rostoucích trpaslíků nebo naopak. Těch je $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}-\binom{8}{4}$. Proč jsem odečetli $\binom{8}{4}$? Protože seřazení s dvěma čtveřicema rostoucích trpaslíků jsme započítali ve členech $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}$ dvakrát. Celkově máme: $8\cdot 3023+8\cdot 3023-8\cdot 7\cdot 371-\binom{8}{3}\binom{5}{3}\cdot 2+\left(\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}-\binom{8}{4}\right) = 26962$. Se Sněhurkou mají $8!-26962 = 40320$ možností na seřazení.

Úloha 2.6. Matěj i Liběnka byli zaměstnáni, proto měl Henry konečně nějaký čas i pro sebe. Celou tu dobu se těšil hlavně na pyramidy. Když k jedné přišel, uviděl vedle ní na stěně starodávnou hádanku přeloženou z hieroglyfů. //Pravděpodobnost, že Kněz odpoví správně na otázku zjišťovací je a. Pravděpodobnost, že kněžka odpoví správně je k, pravděpodobnost, že voják odpoví správně je v. Na oslavě se sešli Kněz, několik kněžek a připletlo se i několik vojáků. Pravděpodobnost, že s Knězem bude další náhodně vybraná osoba souhlasit je 1/2. Jaký je poměr kněžek a vojáků na oslavě?

Řešení. Pravděpodobnost, že zvolená osoba bude souhlasit knězem, je součet pravděpodobností, že kněz odpoví ano a stejně tak zvolená osoba odpoví ano, nebo naopak oba odpoví ne. Tato $pst = 1/2$ (ze zadání). Pokud si označíme počet kněžek jako P_k a počet vojáků jako P_v, můžeme tento vztah zapsat následovně:

$$a\cdot((P_k\cdot k)/(P_k+P_v)+(P_v\cdot v)/(P_k+P_v))+(1-a)\cdot((P_k\cdot(1-k))/(P_k+P_v)+(P_v\cdot(1-v))/(P_k+P_v)) = \frac{1}{2}$$

Úpravami tohoto výrazu pak dostaneme, že $P_k/P_v = (1-2v)/(2k-1)$

Úloha 2.7. V rohu na druhé straně místnosti se krčila malá smutná sfinga Florentýnka. Liběnka zrovna dořešila problém s mincemi a všimla si jí. „Co se ti stalo maličká? Ztratilas něco?“ Zeptala se Liběnka malé roztomilé sfingy. „Nedaří se mi najít jeden trojúhelník. Podívej – je dán trojúhelník ABC. A já mám najít, pouze pomocí pravítka a kružítka, trojúhelník KLM takový, že K, L, M leží po řadě na BC, CA, AB a ze všech takových trojúhelníků má nejmenší možná obsah. Pomůžeš mi?“ Pomozte malé sfinze najít její trojúhelník.

Řešení. *Podle Josefa Minaříka:* Budeme uvažovat opačnou úlohu. Mějme rovnostranný trojúhelník $K'L'M'$ a zkusme vytvořit trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC

tak, aby měl $A'B'C'$ co největší obsah a přitom splňoval podmínku ze zadání (aby body K', L', M' ležely na stranách a', b', c'). Uvažujme tedy napřed jak sestrojit vůbec nějaký takový trojúhelník.

Protože máme zadaný ABC, tak známe úhel při vrcholu A a tedy i u vcholu A' v $A'B'C$ (věta *uu* o podbnosti). Sestrojíme tedy tzv. ekvigonálu, tedy kružnici takových bodů X, že úhel $L'XM'$ má velikost CAB. Obdobně pro další vcholy. Zvolíme-li nyní libovolný bod A' z ekvigonály na níž má ležet bod A (tedy nad úsečkou $L'M'$) a vedeme přímky body L' a M', tak průsečíky těchto přímek se zbylými dvěma ekvagonálami (různé od L', M') nám určí body B', C'. Nyní tedy chceme vybrat takový bod A' aby byl trojúhelník $A'B'C'$ co největší.

Vzhledem k tomu, že jsou si všechny podobné, tak největší obsah bude mít ten, který má nejdelší např. stranu $A'B'$. Uvažujme tedy průsečíky ekvigonál pro A' a B' – jeden z nich je M', druhý nazvěme třeba D. Protože pro libovolnou volbu A' se velikosti úhlů $DA'M'$ a $DB'M'$ nemění (věta o obvodových úhlech), tak, podle věty *uu* jsou všechny trojúhelíky $A'DB'$ podobné. Strana $A'B'$ tedy bude nejdelší právě tedy když bude nejdelší např. strana DA'. Ta může být nejdelší pouze tak, že DA' je průměr ekvigonály a tedy úhel $A'M'D$ musí být pravý (thaletova kružnice).

Bod A' tedy získáme tak, že narýsujeme kolmici k DM' a průsečík s odpovídající ekvigonálou nám jej vytyčí.

Nyní už jen přeneseme zobrazíme $A'B'C'$ na ABC, čímž dostaneme hledaný KLM.