Řešení 2. série

Teorie her

Úloha 2.1. V hloupětínské továrně strýčka Františka se přeli dva zaměstnanci. "Na další experiment potřebujeme právě sudě kádinek se zásadou!", tvdil první. Druhý oponoval: "Blázníš? Vždyť vybouchneme! Liše!"Nalezněte vítěznou strategii pro prvního zaměstnance v následující hře: Máme v řadě 16 kádinek, v první je kyselina, ve druhé zásada, ve třetí kyselina, ve čtvté zásada atd. Hrají dva zaměstnanci proti sobě. Zaměstnanec ve svém tahu vybere dvě sousední kádinky a má dvě možnosti: buď slije obě kádinky do jedné a na místo původní dvojice vloží novou směs, nebo mezi ně vloží zarážku. Smícháním kyseliny s kyselinou vznikne kyselina. Smícháním zásady s kyselinou vznikne kyselina, smícháním dvou zásad vznikne zásada. Kádinky, mezi kterými je zarážka nelze vybrat do dvojice. Hra končí, až už jsou všechny zbylé kádinky odděleny zarážkami. Začíná první zaměstnanec a vyhraje, pokud je počet kádinek se zásadou na konci sudý.3.1 Henry vzal své dvě ratolesti na výlet. Jako ostatně každý jejich výlet, i tento začal u dobrého jídla. Objednali si obrovskou pizzu a než se Henry stihl pohodlně usadit, Liběnka s Matějem už měli většinu pizzy v sobě a na talíři zůstal jen jeden kousek ve tvaru trojúhelníku (jak jinak), na němž bylo 9 (fakt malých, asi jako bod) oliv. A tak Henry, aby na něj zbylo alespoň něco, úkoloval své děti: „Dokažte, že spojením některých tří oliv získáte trojúhelník o obsahu nanejvýš 1/4 zbylé pizzy.“ Dokážete to taky?

Řešení. Prvý zamestnanec sa snaží, aby na konci ostal párny/sudý počet kadičiek so zásadou. Preto ak vo svojom prvom ťahu rozdeli 16 kadičiek zarážkou na 8 a 8, ktoré medzi sebou naďalej nemôžu interagovať, môže kopírovať ťahy druhého zamestnanca, symetricky na opačnej polovici, ako hral druhý zamestnanec. Po každom ťahu prvého hráča sú polovice identické, preto je v súčte počet zásad vždy párny. Hru ukončí prvý hráč, pretože ak má ťah druhý hráč, vďaka symetrii ho má aj prvý. Preto má prvý zamestnanec výhrenú stratégiu: v prvom ťahu rozdeliť kadičky na dve polovice, a v každom ďalšom ťahu kopírovať ťahy súpera.

Úloha 2.2. S rozvojem chemického průmyslu bylo v Hloupětíně třeba zlepšit dopravu, a tak se rozhodli, že postaví letiště. Kouma a Ňouma se přihlásili na pozici leteckých dispečerů. Dostali tak dohromady na starost simulátor letového provozu. Ten funguje takto:

Letový prostor je rozdělen na $n+1$ letových hladin, očíslovaných $0, 1, \ldots, n$ v pořadí zvětšující se vzdálenosti od země. V prostoru je $k \leq n$ letadel, každé na nějaké hladině, ale na jedné hladině se nachází maximálně jedno letadlo. Kouma se střídá s Ňoumou v udílení pokynů letadlům. Pokyn spočívá v tom, že řekne nějakému letadlu, aby sestoupilo na nějakou alespoň o 1 nižší hladinu než stávající. Pokud se na dané hladině již nachází letadlo, pak se letadla srazí (což nevadí) a z každého letadla vyletí 3 padáky (celkem tedy 6), které se drží na letové hladině srážky. Poté už mohou Kouma s Ňoumou udílet pokyny i padákům, ale padáků může být na letové hladině neomezeně a s letadly také neinteragují (nesráží se). Simulátor končí, pokud je letový prostor volný (všechna letadla i padáky jsou na hladině 0, nebo zničená při srážce). Prohrává ten hráč, který už nemá komu udělit pokyn. První pokyn udílí Kouma.

Určete, za jakého iniciálního rozestavení letadel má vítěznou strategii Kouma a za jakého Ňouma.Po dobrém jídle mohla rodinka konečně vyrazit na výstavu o Egyptě, která se právě konala v nedalekém Lenošíně. Šli a šli a šli a najednou… Matěj se zastavil. Zaujal ho kanál. On to totiž nebyl ledajaký kanál! Byla to celočíselná mřížka a na ní 5 žabek. „Hele Liběnko!" zakřičel Matěj. „Na tom kanálu jsou žabky rozsazené tak, že jejich spojením dostaneme konvexní pětiúhelník!" „To je toho," ušklíbla se Liběnka koukajíc na roztomilé obojživelníky, „mnohem zajímavější je, že jeho obsah je alespoň 5/2." Dokážete dokázat Liběnčino tvrzení?

Řešení. Když vycházíme z pomocného textu, můžeme zadání převést na hru Nim. Počet letadel můžeme zaměnit za počet hromádek a výškovou hladinu za počet kamenů/sirek/... v každé hromádce. Musíme však ještě zohlednit srážky letadel. Srážkou dvou letadel v podstatě zničíme dvě hromádky o dané hladině a nahradíme je šesti hromádkami o té stejné hladině. Dosazením zjistíme, že Nim-součet nám to nezmění $\Rightarrow$ výsledek Nim-součtu po dosazení například čísla 6 do výškové hladiny, kde se srazí dvě letadla je stejný jako kdyby letadla zůstala na téže hladině bez rozpadu. Číslo 6 si zapíšeme v binární soustavě 00110 a použijeme operaci XOR. $6 \oplus 6 = 00110 \oplus 00110 = 00000 = 0$ a zároveň$6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 00110 \oplus 00110 \oplus 00110 \oplus 00110 \oplus 00110 \oplus 00110 = 00000 = 0$. Z toho vyplývá, že srážky ani padáky neovlivňují průběh hry, takže záleží jen na pohybech letadel. Zde už příklad můžeme řešit jako klasickou Nim hru a pomocí Nim-součtu a výchozí strategie zjistíme, že pokud je Nim-součet roven nule vyhrává Ňouma, jinak vždycky Kouma.

Úloha 2.3. Hloupětínští starousedlíci se ale rozhodli, že letadla nad hlavami kvůli hluku nechtějí, a tak ukradnou letadlům vrtule. Žádnému ze dvou vybraných zlodějů se do toho ale nechtělo kvůli velkému riziku a tak se dohodli, že se rozhodne pomocí oblíbené hry kámen–nůžky–papír–bomba. Ta funguje stejně jako naše hra kámen–nůžky–papír s tím rozdílem, že je přidána ještě bomba, která porazí papír, remizuje s kamenem a prohraje s nůžkami. Oba zloději se zamysleli, jak hrát, aby byla co nejmenší pravděpodobnost, že bude vybrán. Jsou však vyškoleni spíše v kradení než v matematice. Pomůžete jim nalézt vítěznou, nebo alespoň neprohrávající strategii? A dokážete takové strategie najít všechny?

Za strategii považujme 4 nezáporná reálná čísla k, n, p, z, $k+n+p+z = 1$, která určují, s jakou pravděpodobností hráč daný nástroj zahraje. Můžete předpokládat, že soupeřova strategie je stejného tvaru (také si volí, s jakou pravděpodobností bude hrát který nástroj). Za vítěznou považujeme takovou strategii, která má větší pravděpodobnost výhry, než prohry (nezáleže na soupeřově strategii). Za neprohrávající považujeme takovou, která má proti každé strategii alespoň stejné šance na výhru jako prohru.

Řešení. Hráči hrají oba zaráz, proto je zřejmé, že neexistuje vyhrávající strategie. Po neprohrávající požadujeme, aby proti strategii jakéhokoli soupeře měla šanci 50 : 50 výhry, nebo prohry. Pokud, soupeř hraje stále kámen, musí pro naši strategii platit $p \geq n$. Pokud pouze bomby, platí pro nás $n \geq p$. Pokud dává stále nůžky, my musíme mít $k \geq p + b$. A hraje-li stále papír, musíme mít $n + b \geq k$. Samozřejmě, že bychom si mohli vymyslet mnoho dalších imaginárních protihráčů, ale už s těmito podmínkami odvodíme, že pro každou neprohrávající strategii platí:

$$n = x, p = x, b = \frac{1-3x}{2}, k = \frac{1-x}{2},$$

kde x je větší rovno 0 a menší než 3. Teď uvážíme, že cokoli "vypadne"ze soupeře, máme v každém kole šanci na výhru 50 : 50, a proto jsou neprohrávající strategie všechny, které splňují výše uvedené rovnosti.

Úloha 2.4. Vybranému zloději se však vrtule ukrást nepodařilo a zmizel neznámo kam. Druhý zloděj nedopadl o moc slavněji. Policie jej dopadla záhy a připojila na detektor lži. Ten fungoval tím způsobem, že testovanému byla předložena hra a on se nacházel ve výherní pozici. Pokud nelhal, tak se mohl soustředit na hru, najít vítěznou strategii a vyhrát. Pokud ale lhal, nedokázal se dostatečně soustředit na hru a prohrál. Hra vypadala následovně: hráli proti sobě podezřelí a policista a pravdilně se střídali. Ve hře byli dvě hromádky kamenů s a, b počty kamenů, $a, b > 0$. Hráč na tahu mohl odebrat právě přirozený násobek počtu kamenů první hromádky z druhé hromádky (druhá hromádka tedy musela být alespoň tak velká jako první). Hra skončila, když byla jedna z hromádek vyprázdněna a vyhrál hráč, jež provedl poslední tah. První tah má podezřelý. Určete, pro která $q \in \mathbb{R}^+$ má podezřelý vždy vítěznou strategii, pokud je na začátku v hromádkách a, b kamenů a tyto počty splňují nerovnost $a > qb$. Vyřešte tuto úlohu a dokažte tím svou nevinu!

Řešení. Zřejmě pro $q \leq 1$ splní rovnost jakákoli dvojice x, y. Stačí za a zvolit to větší z čísel. Přitom né z každé situace (př. $2, 3$) nejde vyhrát a tedy $q > 1$.

V celém řešení předpokládám, že a je to větší z čísel.

Uvědomme si, co musí platit, pokud má existova vítězná strategie pro počty kamenů a, b které splňují $a > qb$. Pokud odebere hráč takový počet kamenů, že po jeho tahu tato rovnost platí (tedy nové počty a', b splňují $a' > qb$), pak zjevně tento tah nemůže být součástí výherní strategie. To by totiž musela existovat výherní strategie pro druhého hráče a tedy první hráč by prohrál. Hledáme tedy takové q pro které existuje tah do situace, kdy: buď a', b jsou nezáporné a splňují rovnost (po případném prohození) $a' \leq qb$, nebo lze vyprázdnit jednu hromádku a hráč již vyhrává.

Vyřešme napřed případ, kdy $a < 2b$ a přitom $a > b$. Pak hráč může provést jen jediný tah a to z hromádky o a kamenech odebrat b kamenů. Přitom nemůže vyhrát. Chceme tedy, aby $a > qb$ a zároveň $b \leq q(a - b)$. Nechť tedy $a = q'b$ a chceme, aby platilo, že $b \leq q'(a - b)$. Dosazením a úpravami dostáváme kvadratickou nerovnici:

$$q'^2 + bq' - b \geq 0$$

Jejím řešením je zřejmě $\mathbb{R}$
$(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$. Protože $q \in \mathbb{R}^+$, dostáváme $q' \geq \varphi$, kde φ je zlatý řez roven $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Víme tedy, že pokud a leží mezi φb a $2b$ nevčetně, pak existuje tah do situace, kdy $a \leq qb$. Nyní tedy vyřešíme případ, kdy $a \geq 2b$. Pak, pokud $a = kb$ pro $k \in \mathbb{N}$, tak existuje vítězný tah. Pokud naopak je tedy a necelý násobek b. Pak, díky tomu, že $\varphi b - \frac{1}{\varphi} b \geq b$ (vychází z AG-nerovnosti) se dokážeme "trefit" mezi φb a $\frac{1}{\varphi} b$ tedy opět existuje tah do nepříznívé situace pro druhého hráče.

Nyní už stačí ověřit, že pokud je hráč v situaci, kdy $a \leq \varphi b$, tak nemůže vyhrát (pořád předpokládáme, že $a \geq b$). Jediný případ, kdy by mohl vyhrát, je $a = b$. Pak ale předchozí tah musel odebírat b a předchozí hráč už tedy mohl vyhrát. Taková situace tedy nenastane.

Hledaná q jsou tedy z intervalu $< \varphi, \inf)$.

Úloha 2.5. Nato se starosta Hloupětína usnesl, že na oslavu roku 2016, kdy byla potlačena vzpoura starousedlíků v Hloupětíně, budou mít všechny *letošní* roky o 2 měsíce delší prázdniny. Za letošní byl prohlášen ten rok jehož nějaký celočíselný násobek (jeho pořadového čísla) začíná v dekadickém zápise číslicemi 2016. Ukažte hloupost starosty tím, že dokážete, že každý rok je letošní (rok 0 neexistoval ani v Hloupětíně).

Řešení. Víme, že každé číslo po dělení číslem x dává zbytek r, $0 \leq r < x$. Ukažme, že každé přirozené číslo x je letošní. Vezměme si číslo $k = 2016 \cdot 10^c$, kde c je (alespoň) počet cifer x. Nechť $k \ mod \ x = r$, potom víme, že $l = k + x - r$ je dělitelné x. Navíc jelikož $x - r \leq x < 10^c$, tak víme, že $2016 \cdot 10^c < l < 2017 \cdot 10^c$. Tedy l je dělitelné x a zároveň začíná na 2016, x je letošní rok.

Úloha 2.6. Když se ukázala starostova tupost, byl svolán sněm, kde se měl zvolit starosta nový. Dle platných zákonů se tak provádělo hrací kostkou. Již byl okamžik před vrhem, když do místnosti vtrhl Henry, který byl zrovna na pracovní cestě, volaje: "Zastavte to šílenství! Dokažte mi radši, že každý konvexní mnohostněn má alespoň 2 stěny o stejném počtu hran!"Zkuste to také, třeba vás pak zvolí za starostu Hloupětína.

Řešení. Zvolme stěnu S s největším počtem hran n (pokud je jich více, zvolme libovolnou). Pro každou z n hran stěny S musí existovat jiná stěna, která s S sousedí. Mnohostěn má proto nejméně $n + 1$ stěn. Všechny stěny ale musí mít maximálně n hran. Z Dirichletova principu plyne, že existuje dvojice stěn se stejným počtem hran.

Úloha 2.7. Starosta však nečekaně překvapil a úlohu vyřešil ze všech v sále jako první. Nechali jej tedy dále starostovat. Když se starosta loučil s Henrym, půjčil Henrymu kapesník, neboť se Henry kvůli podzimnímu ochlazení nachladil. Když poté starosta převzal kapesník zpět, zjistil, že se na něm zračí následující úloha:

Najděte všechny prosté funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Starosta dal tuto úlohu vytesat na základní kámen radnice, chtěl však přidat i řešení, které mu ale nikdo nebyl schopen dodat. Budete schopni vy?

Řešení. Nejprve dokážeme, že $f(n) \geq n$ pro všechna n. Pro spor nechť existuje přirozené n pro které $f(n) < n$. Indukcí vzhledem ke k ukážeme, že $f^k(n) < n$ ($f^k(n)$ značí $\underbrace{f(f \dots f(n) \dots)}_{\text{k složení } f}$). Pro $k = 1$ tvrzení platí. Pro $k = 2$ máme vztah ze zadání. Předpokládejme, že $f^i(n) < n$ pro všechna $i \leq n$. Pak $f^{k+2}(n) \leq \frac{f^{k+1}(n)+f^k(n)}{2} < \frac{n+n}{2} = n$. Jelikož existuje konečně mnoho čísel menší než n pak existují $i, j \in \mathbb{N}, i > j$, pro které $f^i(n) = f^j(n)$. Protože je f prostá, pak i $f^{i-j}(n) = n$. To je spor s $f^k(n) < n$.
Vskutku $f(n) \geq n$ pro všechna n. Díky tomu a nerovnosti ze zadání máme $n \geq 2f(f(n)) - f(n) \geq 2f(n) - f(n) = f(n)$ pro všechna n. Celkem $n \geq f(n) \geq n$ a nutně tedy $f(n) = n$ pro všechna n.