Řešení 1. série

Úvodní guláš

Úloha 1.1. „Gulášgvhevmnjdfs!!“, ozvalo se už o něco hlasitěji hladové monstrum dychtící po Liběnčině specialitě. „Henry! Víš moc dobře, že ti nedám, dokud neuhodneš, na co myslím! Malinko ti ale napovím. Myslím si celé číslo x od 1 do 23. Aby jsi zjistil, které to je, můžeš mi pokládat speciální dotazy. Jeden dotaz se skládá ze dvou celých čísel m, n od 1 do 23 a já odpovím $NSD(m, n + x)$. Podaří se ti vždy uhádnout mé číslo pomocí 4 dotazů?“

Řešení. Odpověď na Liběnčinu otázku - ano - šla nejlépe dokázat vypsáním postupů pro každé číslo, jak to i většina z vás dělala. Někteří jste dokonce ukázali, že to vždy lze uhádnout i pomocí 3 dotazů, já ukážu, že stačí dotazy 2. V prvním tahu si za n zvolím 2 a za m 6, tím pádem je n+x v rozsahu od 3 do 12. Vzniknou mi tak 4 skupiny v nichž se může x nacházet. Pokud mi v prvním kroku NSD(m,n+x) vyšel 1, pak x = 5,3 nebo 9 -> dále skupina A. Pokud NSD(m,n+x) = 2, pak x = 2,6 nebo 8 -> dále skupina B. Pokud NSD(m,n+x) = 3, pak x = 1 nebo 7 -> dále skupina C a nakonec pokud NSD(m,n+x) = 6, pak x = 4 nebo 10 -> dále skupina D. Teď už stačí ukázat, že dokážu najít takové m a n, abych jednoznačně rozlišila (až) trojice, což je už snadné. Pro skupinu A m=8 a n=3, pro skupinu B m=9 a n=1, pro skupinu C m=8 a n = 1 a pro skupinu D m=5 a n=10. Samozřejmě to není jediné možné řešení, především poslední dvě skupiny by šly rozhodnout mnoha způsoby.

Úloha 1.2. „Ale Liběnko! Přece bys mě nenechala vyhladovět!?“, vrhnul Henry na Liběnku psí pohled. Liběnka má pro zvířátka slabost. Koukla na guláš, pak na Henryho, pak zase na guláš. „Dobře… Tak já ti teda dám, ale překvapuje mě, že nemáš žádné eso v rukávu.“ „To ale není pravda!“, oponoval Henry. „Mám dva stejné balíčky karet po 52 kartách. Každý balíček nějak zamíchám a položím jeden na druhý. Ty pak pro každou dvojici stejných karet z obou balíčků spočítáš počet karet mezi nimi. Všechna tato čísla sečteš. Jaké čísla můžeš dostat?“

Řešení. Vezměme si dva identicky seřazené balíčky karet a jednoduše nahlédneme, že mezi všemi dvojicemi je 51 karet. Dostaneme se tak k číslu 2652. Nyní už jen ukažme, že tomu tak bude pro libovolné zamíchání balíčků. Libovolné zamíchání balíčku dostaneme pomocí prohazování sousedních karet, ale pro jednoduší představu prohazujme libovolnou dvojici. Když prohodíme dvě karty ze stejného balíčku, tak jedné vzroste a druhé klesne vzdálenost od stejné karty v balíčku druhém. Důležité je, že o stejnou hodnotu a to počet karet mezi nimi zvětšený o jedna. Samotná hodnota, ale není důležitá, neboť se to při celkovém součtu nijak neprojeví. K původnímu součtu přičteme a odečteme stejné číslo. Prohození dvou karet ve stejném balíčku nezmění součet vzdáleností všech karet. Pomocí této operace jsme schopni vytvořit libovolné zamíchání balíčku beze změny součtu. Úloha má tedy jen jedno řešení a to je 2652.

Úloha 1.3. „Teď s mě dostal Henry“, zasmála se Líba, vzala veliký talíř a pořádně Henrymu naložila. Ten spokojeně zbaštil pár prvních soust, aby zaplnil prázdný žaludek a pak si toho všiml. V tom guláši byla písmenka! Ba ne… to nebyla písmenka, to byla čísla.

Každá číslice právě jednou. Henryho nenapadlo nic chytřejšího, než z těchto číslic vytvořit přirozené číslo (číslice, které se mu nehodily, snědl). A protože ho bavilo se v tom guláši ráchat, přeuspořádával zbylé číslice, dokud nevytvořil všechna množná čísla vzniklá jejich kombinací. Pokud pak všechna tato čísla (včetně původního) byla po dvou nesoudělná, nazval původní číslo „drsné“. Kolik různých drsných čísel mohl vytvořit, pokud měla Liběnka dost guláše na přidání?

Řešení. 1. Jednociferná čísla jsou všechna drsná, je jich tedy 9 (0 není přirozená).

2. Dvojciferná čísla – prostě si napíšeme všech 90 čísel a zjistíme, že 49 z nich je drsných. (lze také použít např. toho, že ciferný součet nesmí být dělitelný 3, nesmí být obě číslice sudé apod.)

3. Trojciferná čísla – zjevně pokud by obsahovala sudou čílici, pak bychom ji mohli dát na číslo jednotek a prohodit první dvě čílice. Tato dvě čísla by poté byla dělitelná 2 a tedy ani jedno z nich by nebylo drsné. Stejně tak i pro cifru 5. Máme tedy pouze 4 číslice (1, 3, 7, 9), které můžeme použít. 3 prvkové podmnožiny těchto čílic jsou 4, každá nám dá buď 0 nebo 6 drsných čísel (pokud je drsné jedno, musí být drsné všechny permutace). Opět vyzkoušíme a zjistíme, že vyhovují pouze množiny $\{1, 3, 7\}$ a $\{3, 7, 9\}$, tedy dostaneme 12 drsných čísel.

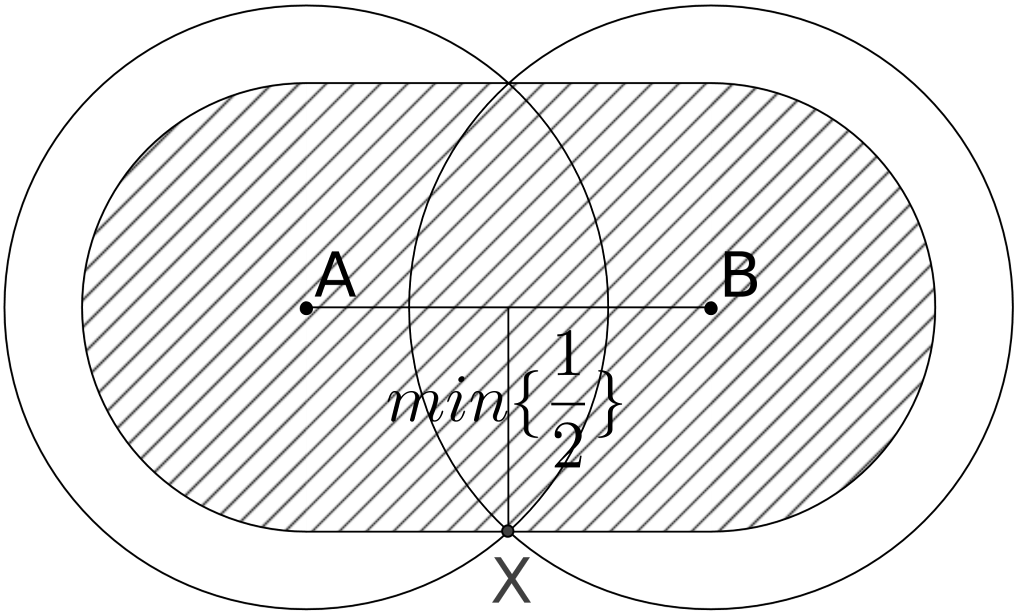
4. Stejnou úvahou jako pro trojciferná dostáváme, že jedinými přípustnými ciframi jsou cifry liché bez 5 a tedy můžeme dostat buď 12! nebo 0 čísel. Ale $11|3179$ a přitom $11|1379$ a tedy nedostáváme žádná drsná čísla.

5. Pět a více ciferná. Muselibychom použít už buď sudou cifru nebo 5 a to jsme ukázali, že nemůžeme. Taková čísla tedy nejsou drsná.

Tedy dostáváme, že drsných čísel je 70.

Úloha 1.4. „Mohl bys teď, prosím, umýt nádobí?“, zeptala se po vydatné snídani/obědu/svačině Liběnka. Z Henryho vyprchalo gulášové nadšení. „Jak se tak na ty dva 2016-úhelníkové talíře se stejným obsahem a všemi stranami menšími než 1 koukám, nebude jednoduché je dát do odkapávače.“ „Podívej, Henry, když budou každé dva vrcholy různých talířů od sebe vzdálené alespoň $\frac{1}{\sqrt{2}}$, určitě se to tam vleze.” “Nevěřím, dokaž to!”

Řešení. Napřed ukážeme, že se žádné 2 strany nekříží (nemají společný bod). uvažujme tedy stranu AB prvního talíře a stranu CD talíře druhého. Pro spor předpokládejme, že se protínají. Označme P bod průniku. BÚNO předpokládejme, že $|CP| < |DP|$. Pak $|CP| < \frac{1}{2}$. Protože $P \in AB$ tak platí že vzdálenost bodu C a úsečky AB je menší než délka $|CP|$, tedy $d(C, AB) < \frac{1}{2}$. Z obrázku ale vidíme, že již dostáváme spor, neboť množina všech bodů vzdálených od AB o méně než 0,5 leží celá v zakázané oblasti vymezené sjednocením kruhů $k_1(A, \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k_2(B, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bod X, který je přitom této množině vždy nejblíže nemůže být (dle Pythagorovy věty) blíže než $frac12$ k úsečce AB, tedy skutečně dostáváme spor.



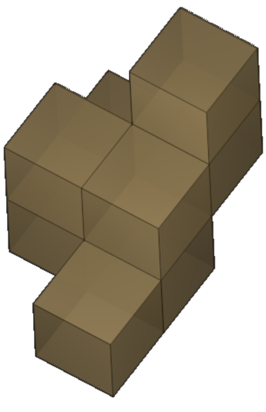
Strany talířů se tedy neprotínají. Mohou nastat dvě možnosti:

1. Jeden talíř leží uvnitř druhého – pak ale nemohou mít stejný obsah, tato možnost tedy nenastane.

2. Možnost povolená zadáním, QED.

Poznámka: Předpoklad o stejnosti obsahů není potřeba. Inklusi totiž dokážeme vyloučit i pomocí druhého předpokladu (rozmyslete si (uvažujte trojúhelník vrcholů jednoho talíře ve kterém leží vrchel toho druhého)). Byl vám přidán pouze pro zjednodušení úlohy.

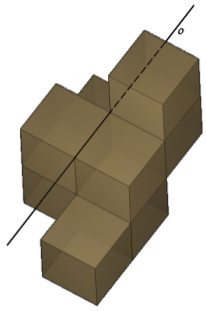
Úloha 1.5. Talíře nějak zvládli, ale bylo tam ještě další nádobí. Obzvlášť tyhle podivné kostičky, o kterých vůbec Liběnka nevěděla, že je má ve své kredenci.



Dokázali byste s nimi vyplnit prostor? Jak?

Řešení. Vezměme si jednu kostičku stejně natočenou jako je na obrázku v zadní a k ní druhou, kterou otočíme o 180° kolem osy o. Tato kostička zapadne do první a společně vytvoří jeden díl, který pak můžeme skládat za sebe ve směru osy o. Takto nám vznikne nekonečný útvar o průřezu 2×4, který můžeme umisťovat na sebe a vedle sebe ve směrech kolmých na osu o. Tím zaplníme celý prostor beze zbytku.

BRKOS Team 2016



Úloha 1.6. „Konečně je vše uklizeno a můžeme se jet bavit!“ Liběnka s Henrym se rozhodli, že pojedou na turnaj. Henry řídil, ale protože byl tak natěšený, že jel trochu rychleji, než by měl, zastavili je policajti. „Dobrý den mladý muži, budete mi tady muset fouknout do balónku.“, povídá švihácký policista. „Dobrý den! A pomůžete pak i vy nám? Máme 40 balónků. Tlak v každém z nich je neznámý. Můžeme si vždy vybrat 5 balónků a vyrovnat v nich tlak na aritemtický průměr původních velikostí tlaků. Ukažte, že lze vyrovnat tlak ve všech 40 balóncích.“

Řešení. Postupů, jak vyrovnat tlak v balóncích je mnoho. Při každém musíme vytvořit nejprve malé skupiny balónků o stejném tlaku, počet skupin poté zmenšujeme a počet balónků v jednotlivých skupinách zvyšujeme. Například nejprve rozdělíme balónky na deset skupin po čtyřech balóncích, označme je a až j. Poté vyrovnáváme tlak v pěticích balónků ze skupin a až e takových, že balónky jsou z různých skupin. To též provedeme se skupinami f až j. Takto získáme dvě skupiny po dvaceti balóncích takových, že v rámci skupiny mají balónky stejný tlak. Nyní stačí vyrovnat tlak ve dvojicích balónků, kde jeden balónek pochází z první skupiny a druhý z druhé skupiny.

Úloha 1.7. Když všichni dofoukali, rozloučili se a Henry s Liběnkou upalovali na turnaj. Koná se turnaj n hráčů. Navrhněte zápasy, tak aby jejich počet byl co nejmenší a v každé trojici hráčů byli dva, co spolu hráli.

Řešení podle Josefa Minaříka. Označme k počet zápasů, které odehrál hráč, jenž hrál nejmenší počet zápasů. Tento hráč nehrál proti $n-k-1$ jiným hráčům, tito hráči proto museli všichni spolu hrát, každý tedy $n-k-2$ zápasů. Každý ze zbylých $k+1$ hráčů musel odehrát alespoň k zápasů (k je minimum). Celkem bylo odehráno nejméně $\frac{1}{2}((n-k-1)(n-k-2)+k(k+1))$ zápasů. Počet jsme vynásobili jednou polovinou, každý zápas byl totiž započítán za každého dvakrát. Upravujme $\frac{1}{2}((n-k-1)(n-k-2)+k(k+1)) = \frac{1}{2}(n^2-2kn-3n+2k^2+4k+2) = \left(\frac{n}{2}-1-k\right)^2-\frac{n}{2}+\frac{n^2}{4}$. Hodnota tohoto výrazu je v závislosti na k nejmenší právě tehdy, když hodnota výrazu $\left(\frac{n}{2}-1-k\right)^2$ je co nejmenší. Jelikož je k celé, pak $\left(\frac{n}{2}-1-k\right)^2 \geq 0$ pro sudá n a $\left(\frac{n}{2}-1-k\right)^2 \geq \frac{1}{2}$ pro lichá n. Připočtením členu $-\frac{n}{2}+\frac{n^2}{4}$ dostáváme, že počet zápasů je alespoň $\frac{n^2-2n}{4}$ pro sudá n a $\frac{n^2-2n+4}{4}$ pro lichá n.

Najít vhodné rozdělení už je snadné. Pro sudá n rozdělíme hráče na dvě poloviny a necháme v obou půlkách hrát každého s každým. Pro lichá n obdobně rozdělíme hráče na skupiny po $\frac{n+1}{2}$ a $\frac{n-1}{2}$ hráčích.

Existuje takové rozdělení zápasů a každé jiné bude mít stejný počet her nebo vyšší. Našli jsme naše hledané minimum.

Jiné řešení. Nejprve dokážeme, že počet zápasů bude vždy alespoň $\frac{(n-1)^2}{4}$ pro lichá n a $\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{1}{4}$ pro sudá n. Veďme důkaz indukcí. Případy $n=1$ a $n=2$ jsou zřejmé.

Mějme $n+2$ hráčů. Pokud každý hrál s každým, pak počet zápasů byl $\binom{n+2}{2} \geq \frac{(n+1)^2}{2}$. V opačném případě spolu nějací dva hráči nehráli. S každým dalším hráčem musel alespoň jeden z této dvojice hrát, aby nevytvořili zakázanou trojici. Tedy alespoň n zápasů s naší dvojicí hráčů. Z indukčního předpokladu v rámci n zbylých hráčů proběhlo alespoň $\frac{(n-1)^2}{4}$ pro lichá n a $\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$ pro sudá n. Celkem máme alespoň $\frac{(n-1)^2}{4} + n = \frac{(n+1)^2}{2}$ pro lichá n a $\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{4}$ pro sudá n.

Vhodné rozdělení najdeme jako v řešení výše