Řešení 6. série

Nerovnosti

Úloha 6.1. Liběnka s Matějem už se zase dohadovali. Oba dostali od Henryho nenulová reálná čísla. Liběnka si z nich vyrobila číslo $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$, zatímco Matějovi stačilo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Samozřejmě se dohadovali, kdo má číslo větší. Rozsoudil je až Henry, když prohlásil, že to stejně záleží jen na znaménku $a+b$. Zkuste tuto skutečnost dokázat.

Řešení. Zajímá nás rozdíl Liběnčina a Matějova čísla, je-li větší než 0, Liběnčino číslo je větší, je-li menší, Matějovo číslo je větší, a pokud je roven 0, jsou čísla stejná.
Nejprve si tedy upravíme rozdíl Liběnčina a Matějova čísla $(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2})-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ do tvaru $\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}$. Číslo a^2b^2 je určitě kladné (a z podmínky v zadání i různé od 0). $(a-b)^2$ nemůže být záporné číslo. Pokud je rovno 0, pak Liběnčino a Matějovo číslo jsou stejně velká. Jestli je ale jedno z nich větší než druhé závisí na znaménku součtu $(a+b)$. Pokud tento součet je roven 0, pak i celý zlomek $\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}$ bude 0 a čísla $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ jsou stejně velká; pokud kladné číslo, Liběnčino číslo je větší; pokud záporné, pak Matějovo. Tím jsme dokázali Henryho tvrzení, že čí číslo větší, závisí na znaménku $a+b$.

Úloha 6.2. To Bubla si lámala hlavu s jiným problémem. Zvolila si tři ostré úhly α, β, γ a snažila se dokázat, že pro ně platí

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}.$$

Pomozte Buble tento problém vyřešit.

Řešení. Nejprve z AG nerovnosti pro $\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{1}{\cos\beta}, \frac{1}{\cos\gamma}$ získáme

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$, což pro ostré úhly α,β,γ znamená $\alpha=\beta=\gamma$.

Třetí odmocnina je rostoucí funkce, takže $\sqrt[3]{a}\geq\sqrt[3]{b}$ právě tehdy, když $a\geq b$. Stačí nám tedy dokázat

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\geq\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

Rozepišme pravou stranu pomocí funkcí sin a cos a převeďme zlomky na společného jmenovatele:

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}-\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Čitatele dále upravíme pomocí součtových vzorců $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ a $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= \\ = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma &= \sin(\alpha+\beta+\gamma)\end{aligned}$$

Dokazujeme tedy nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \geq \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Její platnost je ale zřejmá, protože funkce sin je vždy menší rovna 1 a jmenovatel je pro ostré úhly kladný. Rovnost navíc nastává pro $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$. Původní dokazovaná nerovnost je tím tedy dokázána a navíc jsme zjistili, že rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6} = 30°$.

Úloha 6.3. Poté, co si své nerovnosti všichni čtyři řádně urovnali, vrhli se společně na trojici kladných reálných čísel u, v, w. Zjistili, že ať už je volí jakkoliv, vždycky je výraz

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c}$$

menší nebo roven $\frac{3}{4}$. Dokažte to.

Řešení. 1. řešení: Jelikož se jedná o homogenní nerovnost, stačí nám ji dokázat jen pro trojice a, b, c splňující $a+b+c = 1$, tedy:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{1}{a+1} + 1 - \frac{1}{b+1} + 1 - \frac{1}{c+1} \leq \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4} \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$$

$$(1+1+1)^2 \leq \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \cdot 4$$

$$\left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{b+1}} + \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)(a+1+b+1+c+1)$$

A to je Cauchy-Schwarzova nerovnost.

2. řešení: Pevně si zafixujme $s = a+b+c$ (budeme s považovat za kladnou konstantu). Funkce daná předpisem $\frac{x}{x+s} = 1 - \frac{s}{x+s}$, je zřejmě konkávní na $\mathbb{R}^+$. Můžeme proto využít Jensenovu nerovnost, s váhami $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3}\frac{a}{a+s} + \frac{1}{3}\frac{b}{b+s} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+s} \leq \frac{\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + s} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{a+s} + \frac{b}{b+s} + \frac{c}{c+s} \leq \frac{3}{4}$$

Což je po zpětném dosazení za s kýžená nerovnost.

3.řešení: Začneme drobnou úpravou.

$$1-\frac{a+b+c}{2a+b+c}+1-\frac{a+b+c}{2a+b+c}+1-\frac{a+b+c}{2a+b+c}\leq\frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4}\leq\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{2a+b+c}$$

$$\frac{3}{\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{2a+b+c}}\leq\frac{4}{3}=\frac{\frac{2a+b+c}{a+b+c}+\frac{a+2b+c}{a+b+c}+\frac{a+b+2c}{a+b+c}}{3}$$

Skončíme konstatováním, že se jedná o AH nerovnost.

Úloha 6.4. Matěj u příkladu nevydržel moc dlouho a už ho napadaly další úpravy. Tentokrát si vzal hned n reálných čísel, ale všechny uvnitř kladného intervalu $[a,b]$, takže při jeho označení platilo $0<a\leq x_1,x_2,\dots,x_n\leq b$. Matěj pak hravě dokázal, že

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leq\frac{n^2(a+b)^2}{4ab}.$$

Dokažte to také.

Řešení. Vyberme si nějaké i, $1\leq i\leq n$. Označme $x=x_i, s=x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n, r=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{i-1}}+\frac{1}{x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x_n}$. Pak na levé straně nerovnosti je výraz

$$(s+x)\left(r+\frac{1}{x}\right)=sr+1+rx+\frac{s}{x}$$

To je pro kladná x konvexní funkce. Nabývá tedy zřejmě maxima v krajních bodech intervalu, na němž ji uvažujeme, tj. buď pro $x=a$ nebo $x=b$. Tuto úvahu můžeme provést pro libovolné i a získáme, že levá strana je maximální, pokud je k z čísel $x_1,\dots,x_n$ rovno a a $n-k$ je rovno b pro vhodné k. Máme tedy

$$\begin{aligned}(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)&\leq(ka+(n-k)\,b)\left(\frac{k}{a}+\frac{n-k}{b}\right)=\\&=\frac{1}{ab}\left(k(a-b)+nb\right)\left(k(b-a)+na\right)=\\&=\frac{(a-b)^2}{ab}\left(-\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}+n^2\frac{ab}{(a-b)^2}\right)\end{aligned}$$

Člen s $(k-n/2)^2$ vystupuje vždy se záporným znaménkem a celý výraz se jeho odstraněním určitě nezmenší. Platí tak

$$(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leq\frac{(a-b)^2}{ab}\left(\frac{n^2}{4}+n^2\frac{ab}{(a-b)^2}\right)=\frac{n^2(a+b)^2}{4ab},$$

což jsme chtěli dokázat.

Z uvedeného postupu je navíc zřejmé, že rovnost může nastat pouze pokud buď $a=b$, nebo je n sudé, $n/2$ čísel $x_1,\dots,x_n$ je rovno a a zbylých $n/2$ je rovno b.

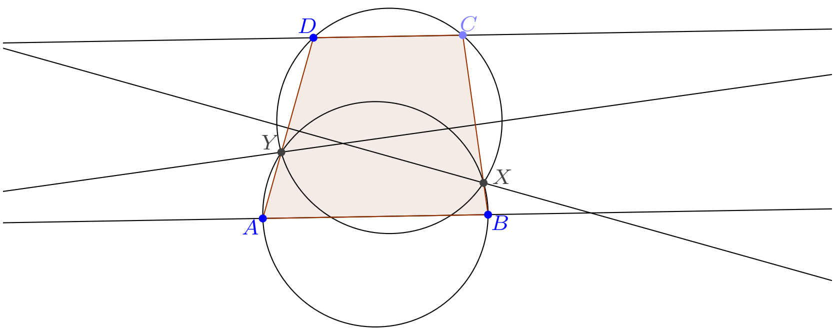
Úloha 6.5. Koumu nerovnosti zase tak moc nezajímaly. Raději si vyšel do přírody. Procházel se na louce, obdivoval broučky a hlavně Hloupětínské berušky šestitečné. Tyto berušky měly na krovkách šest teček, které byly navíc propojeny celkem deseti čarami (taková čára vždy spojovala právě dvě tečky). Kouma si brzy všiml, že na každé berušce je taková trojice teček, že každá tečka z této trojice je spojena s ostatními dvěma tečkami v trojici. Přišlo mu to zvláštní, a tak přemýšlel, jestli to tak musí být vždy. Najděte odpověď a řádně ji dokažte.

Řešení. Uvažujeme graf s 6 vrcholmi a 10 hranami. Súčet stupňov vrcholov (počet hrán vychádzajúcich z daného vrcholu) je teda 20. Nutne musí existovať vrchol so stupňom 4, inak by súčet stupňov bol maximálne $6 \cdot 3 = 18$. Označme si vrcholy A, B, C, D, E, F, kde A je vrchol so stupňom 4 a vedú z neho hrany do B, C, D, E. Ak existuje hrana medzi týmito štyrmi vrcholmi, je v grafe trojuholník a veta zo zadania platí. Predpokladajme, že medzi nimi hrana neexistuje. Potom musí zvyšných 6 hrán viesť do vrcholov A, F. Takých hrán existuje však najviac 5 (z F do všetkých vrcholov, vrátane A). Tým pádom posledná hrana musí spájať nejaké vrcholy z B, C, D, E, čo je spor a preto veta zo zadania vždy platí.

Úloha 6.6. V Hloupětíně na náměstí Lichoběžníku (ve tvaru lichoběžníku) se chystal start Hloupětínského maratonu. Měl být tvořen velkou ozdobnou páskou, táhnoucí se napříč náměstím a dělící náměstí na dva čtyřúhelníky. Jak mají Hloupětínští pásku táhnout, jestliže chtějí rozdělit náměstí na dva tětivové čtyřúhelníky (čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici) a jestliže navíc kružnice opsané těmto čtyřúhelníkům mají mít stejný poloměr?

Řešení. Označme si lichoběžník $ABCD$, se základnami AB, CD. Uvažujme prvně případ, kdy páska vede mezi rameny lichoběžníka. X je bod na AD, Y na BC. Protože součet protějších úhlů tětivového čtyřúhelníka musí být přímý a zároveň součet velikostí úhlů BAD a ADC je přímý, musí být úhel XYC shodný s úhlem DAB. Protože kružnice opsané mají mít stejný poloměr, musí i tětivy příslušné stejným obvodovým úhlům být stejně velké, tedy $|XC| = |XB|$, Bod X tedy leží na ose úsečky BC. Obdobně bod Y leží na ose AD. Tím už máme konstrukci jasně danou:

1. p; p osa AD
2. q; q osa BC
3. X; $X \in q \cap BC$
4. Y; $Y \in p \cap AD$
5. XY



Nyní už stačí rozebrat případ, kdy páska vede mezi základnami. Z vlastostí vedlejších úhlů se snadno nahlédne, že tento případ lze sestrojit jen pro rovnoběžník. Konstrukci pak provedeme tak, že jej "postavíme na ramena"a provedeme předchozí. *Diskuse:* Úloha má 0 nebo 1 řešení pro obecný lichoběžník, v závislosti na tom, zda osy protnou ramena. Pro rovnoběžníky pak může mít 0 až 2 řešení (0 – fakt hafo spláclé kosočtverec, 1 – trochu skosené obdélník, 2 – tak třeba čtverec).

Úloha 6.7. Ňouma se chtěl maratonu zúčastnit, ale vyrušilo ho tvrzení, že ke každému přirozenému číslu $k \geq 2$ lze vybrat taková celá čísla $a, b, a > b$, že výraz $n^a - n^b$ bude dělitelný k pro všechna přirozená čísla n.

Řešení. 1. řešení: Uvažujme rozklad $k = k_1 k_2$ čísla k takový, že k_1 je s n nesoudělné a k_2 obsahuje ve svém rozkladu jen prvočísla dělící n. Pak z Eulerovy věty a z faktu, že funkce φ je multiplikativní plyne

$$n^{\varphi(k)} \equiv (n^{\varphi(k_1)})^{\varphi(k_2)} \equiv 1 \pmod{k_1}$$

Stačí tedy položit $a - b = \varphi(k)$, aby nutně $k_1 \mid n^a - n^b = n^b(n^{a-b} - 1)$. Zvolímeli navíc b jako největší exponent vystupující v prvočíselném rozkladu k, pak nutně i $k_2 \mid n^b$. Z nesoudělnosti k_1 a k_2 konečně dostáváme $k \mid n^b(n^{a-b} - 1)$.

2. řešení: Nechť $n = kl + r$, kde $0 \leq r < k$. Dosaďme a využijme binomickou větu.

$$n^a - n^b = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} (kl)^i r^{a-i} - \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (kl)^i r^{b-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \binom{a}{i} (kl)^i r^{a-i} - \sum_{i=1}^{b} \binom{b}{i} (kl)^i r^{b-i} + r^a - r^b$$

Z toho plyne, že $k \mid n^a - n^b \iff k \mid r^a - r^b$. Označme si nyní $\mathbb{Z}_k$ množinu zbytků po dělení k a uvažujme pro každé přirozené a funkci $f_a : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k$, která každému $r \in \mathbb{Z}_k$ přiřadí zbytek po dělení r^a číslem k. Jelikož je množina $\mathbb{Z}_k$ konečná, potom i je počet všech funkcí na této množině konečný. Musí tedy existovat dvě různé funkce f_a, f_b splňující $f_a(x) = f_b(x), \forall r \in \mathbb{Z}_k$. Jinými slovy existují dvě různá a, b taková, že $k \mid r^a - r^b, \forall r \in \mathbb{Z}_k$.