Řešení 5. série

Polynomy

Úloha 5.1. Matěj s Liběnkou hráli hru. Na začátku měli obecný normovaný polynom stupně 2016:

$$P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Střídali se na tahu a v každém tahu přiřadili jednomu z koeficientů $a_0, \ldots, a_{2015}$ konkrétní reálnou hodnotu (reálné číslo). Začíná Matěj. Po 2016 tazích jsou všechny koeficienty určeny, hra končí a P(x) se stává konkrétním polynomem. Pokud je na konci číslo 2016 kořenem, vyhrává Liběnka, v opačném případě vyhraje Matěj. Kdo má v této hře vítěznou strategii (tj. může hrát tak, že vždy vyhraje, ať už hraje druhý hráč jakkoliv)?

Řešení. Vítěznou strategii má v této hře Liběnka(druhý hráč) - jelikož na ni připadá doplnění posledního členu v rovnici: $P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_{2015} \cdots a_1$ jsou konstanty, a a_0 proměnná. Stačí jí tedy, aby za x dosadila 2016, rovnici položila rovnu nule a dopočítala a_0 - pak si může být jistá, že 2016 je kořenem.

Úloha 5.2. Henry měl jiné starosti. Měl polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$, jehož kořeny si označil jako α, β, γ a chtěl najít polynom, jehož kořeny by byly α^3, β^3, γ^3. Pomožte mu s tímto úkolem.

Řešení. Napišme si Vietovy vztahy pro polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$:

$$\alpha + \beta + \gamma = -a$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b$$

$$\alpha\beta\gamma = -c$$

Dále zjistíme hodnotu výrazu $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ v závislosti na koeficientech a, b, c, tedy vlastně koeficient u kvadratického člene našeho hledaného polynomu (akorát s opačným znaménkem):

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3(\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma) =$$

$$(-a)^3 - 3((\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \alpha\beta\gamma)) + 3\alpha\beta\gamma =$$

$$-a^3 - 3(\alpha(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \beta(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \gamma(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)) + 3(-c) =$$

$$-a^3 - 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + -3c = -a^3 + 3ab - 3c$$

Nyní zjistíme hodnotu výrazu $\alpha^3\beta^3 + \alpha^3\gamma^3 + \beta^3\gamma^3$ v závislosti na koeficientech a, b, c, tedy vlastně koeficient u lineárního členu našeho hledaného polynomu:

$$\alpha^3\beta^3 + \alpha^3\gamma^3 + \beta^3\gamma^3 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^3 - 3\alpha\beta\gamma(\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma) =$$

$$(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^3 - 3\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3\alpha^2\beta^2\gamma^2 = b^3 - 3(-c)(-a)b + 3c^2 = b^3 - 3abc + 3c^2$$

A na závěr zjistíme hodnotu výrazu $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ v závislosti na koeficientech a, b, c, tedy vlastně koeficient u absolutního členu našeho hledaného polynomu (akorát s opačným znaménkem):

$$\alpha^3\beta^3\gamma^3 = (\alpha\beta\gamma)^3 = -c^3$$

Hledaný polynom má tedy takovýto tvar:

$$x^3 + (a^3 - 3ab + 3c)x^2 + (b^3 - 3abc + 3c^2)x + c^3$$

Úloha 5.3. K jejich polynomiálním radovánkám se přidala i Bubla, když si přinesla všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty a alespoň jedním reálným kořenem, které splňují

$$P(P(x)) = P(x)^{2016}$$

. Určete všechny Bubliny polynomy.

Řešení. 1. řešení: Nechť libovolný kořen polynomu (ze zadání nějaký existuje) je r. Pak pokud platí $P(P(x)) = P(x)^{2016}$, pak také $P(P(r)) = P(r)^{2016}$ neboli $P(0) = 0$. Takže absolutní člen polynomu musí být nulový. Označme stupeň polynomu $P(x)$ jako n. Pak stupeň polynomu $P(P(x))$ je zřejmě n^2, zatímco stupeň polynomu $P(x)^{2016}$ je $2016n$. Mají-li se tyto dva polynomy rovnat, musí tedy platit $n^2 = 2016n$, což má dvě řešení $n_1 = 0$ a $n_2 = 2016$. V prvním případě jde o konstantní polynom a jelikož ze zadání má být absolutní člen nulový, zbývá jediná možnost $P(x) = 0$, která jak snadno ověříme vyhovuje zadání. V druhém případě je polynom tvaru $P(x) = a_{2016}x^{2016} + \cdots + a_kx^k$, kde k jsme označili nejnižší stupeň x, který je nenulový (tzn. $a_k \neq 0$ a zatím $2016 \leq k \leq 1$). Nyní se zaměřme na členy nejnižšího stupně (nenulové) $P(P(x))$ a $P(x)^{2016}$. Budou to zřejmě po řadě členy $a_k(a_kx^k)^k$ a $(a_kx^k)^{2016}$. Dva polynomy jsou si rovny právě, když jsou si rovny všechny jejich členy a to musí platit zejména pro členy nejnižšího stupně. Získáváme tak rovnost polynomů $a_k^{k+1}x^{k^2} = a_k^{2016}x^{2016k}$. Ta ale platí jen pokud jsou shodné také stupně, takže $k^2 = 2016k$ a protože k není nulové, $k = 2016$. Z rovnosti navíc máme $a_{2016}^{2017} = a_{2016}^{2016}$, což opět díky tomu, že vedoucí člen je nenulový dává $a_{2016} = 1$. To znamená, že máme jediné další řešení a tím je $P(x) = x^{2016}$.

2. řešení: Stejně jako v prvním řešení získáme konstantní řešení $P(x) = 0$ a dále se zabýváme nekonstantními polynomy. Každý nekonstantní polynom má na reálných číslech neomezený definiční obor, jinými slovy nabývá nekonečně mnoha různých hodnot. Provedeme-li tedy substituci $P(x) = y$, získáme, že $P(y) = y^{2016}$ platí pro nekonečně mnoho různých y. Uvědomíme-li si, že polynom stupně n je určen hodnotou v $n+1$ různých bodech, dostáváme, že $P(x)$ je totožné s x^{2016} alespoň v $n+1$ bodech (protože nekonečno je větší než $n+1$ ať už je n jakékoliv), a tedy musí přímo platit rovnost polynomů $P(x) = x^{2016}$, čímž dostáváme druhé řešení.

Úloha 5.4. Nakonec dali všichni hlavy dohromady a přišli s polynomem $P(x)$ stupně n, který splňuje

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n$. Jaká je hodnota $P(n+1)$?

Řešení. Uvažme polynom $Q(x) = (x+1)P(x) - x$, který má stupeň $n+1$. Z rovnosti ze zadání ihned vidíme všech jeho $n+1$ kořenů, tedy čísla $0, 1, ..., n$. Polynom $Q(x)$ je proto tvaru $Q(x) = Kx(x-1)(x-2)\dots(x-n)$, kde K je nějaká konstanta, kterou teď najdeme dosazením $x = -1$:

$$Q(-1) = (-1+1)P(-1) - (-1) = K(-1)(-1-1)\dots(-1-n)$$
$$1 = K(-1)^{n+1}(1)(2)\dots(n+1)$$
$$K = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$$

Dosadíme-li nakonec $x = n+1$, dostáváme hledanou hodnotu.

$$Q(n+1) = (n+1+1)P(n+1) - (n+1) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}(n+1)(n+1-1)\dots(n+1-n)$$

$$(n+2)P(n+1) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\cdot(n+1)! + n + 1$$
$$(n+2)P(n+1) = (-1)^{n+1} + n + 1$$
$$P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2}$$

Pokud je n sudé, tak se výraz zjednoduší na $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$, v případě lichého n vyjde zase $P(n+1) = 1$.

Úloha 5.5. Kouma už má polynomy dávno na háku, a tak se raději věnoval tabulce 3×3. Chtěl ji vyplnit čísly 1 až 9 tak, aby součet libovolných dvou sousedních polí (sousedících přes hranu) byl prvočíslo. Mohlo se mu to podařit?

Řešení. Důkaz sporem: Předpokládejme, že lze vyplnit tabulku 3x3 čísly 1 až 9 tak, že součet každých dvou hranou sousedících čísel je prvočíslo.
Nejmenší prvočíslo, které nám může vzniknout součtem dvou různých čísel od 1 do 9, je 3. Všechny součty tedy budou lichá čísla, a proto sčítance musí být různé parity. Dále máme k dispozici 4 sudé čísla a 5 lichých. Aby byla vedle sebe jen čísla různé parity, musí být lichá čísla na obou diagonálách tabulky a sudá na zbývajících polích. Prostřední pole, kde je liché číslo, sousedí se čtyřmi sudými čísly (tedy všemi sudými čísly mezi 1 a 9), které se postupně od sebe liší o 2. Tedy i v součtu s číslem na prostřední pozici se budou součty lišit také o 2. Pro každé tři čísla takto jdoucí po sobě jistě platí, že po dělení 3 dávají různý zbytek, tedy jedno z nich je dělitelné 3, což je spor s předpokladem. Tabulku tedy tímto způsobem vyplnit nelze.

Úloha 5.6. Na lenošínském náměstí tvaru trojúhelníku ABC chtěli postavit nový chodník. Ten měl vést z bodu A po straně AB až k bodu X, pak přímo k bodu Y na straně BC a nakonec po této straně k bodu C. Navíc mělo platit $|AX| = |XY| = |YC|$. Jak mohou lenošínští stavitelé zkonstruovat body X a Y, jestliže mají jen pravítko a kružítko (ač dostatečně velká).

Řešení. Myšlenka řešení je taková, že sestrojíme trojúhelník podobný (a stejnolehlý se středem C) trojúhelníku ABC, kde budeme mít i setrojenou cestu, a pak pouze stejnolehlostí tuto cestu přeneseme na ABC.

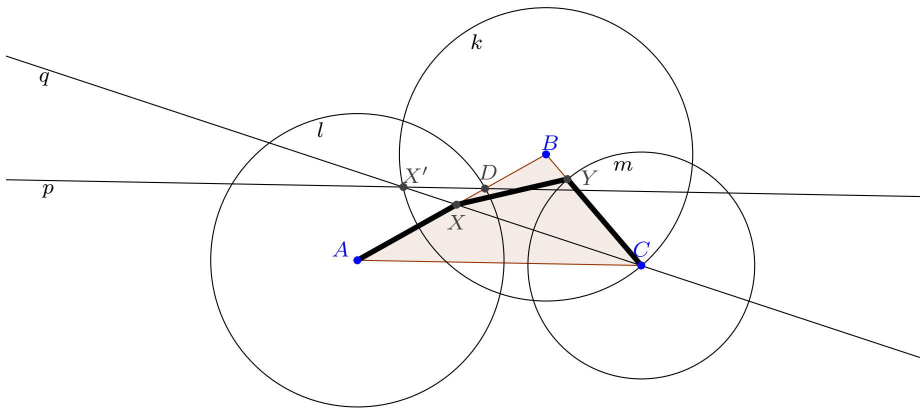
BÚNO předpokládejme, že $|BC| \leq |AB|$.

1. $k; k(B, |BC|)$

2. $l; l(A, |BC|)$
3. $D; D = l \cap \overline{AB}$
4. $p; p \| AC, D \in p$
5. $X'; X', F = p \cap k, |AX'| <= |AF|$ (chceme vybrat ten "levý"z průsečíků)
6. $X; X = \overrightarrow{X'C} \cap \overline{AB}$
7. $m; m(C, |AX|)$
8. $Y; Y = m \cap \overline{BC}$

Z onoho podobného trojúhelníku jsme sestolili pouze bod X'. Celý trojúhelník bychom dostali, kdybychom tímto bodem vedli rovnoběžku se stranou AB a našli průsečíky se stranami AC a BC. Zároveň bod Y' se zobrazí přesně na bod B (a C' jako střed stejnolehlosti na C). Díky tomu je vidět, že $|A'X'| = |X'Y'| = |C'Y'|$.

Diskuse: úloha má nula až jedno řešení. Pořebujeme, aby bod D ležel **ve** kružnici k (aby plopřímka $\overrightarrow{X'C}$ protínala stranu AB). To nastane, pokud $|AB| \leq 2|BC|$. Tehdy má úloha 1 řešení, jinak nemá žádné.



Úloha 5.7. V Hloupětíně zavedli novou sociální síť FejsBRK. Umožňovala obyvatelům Hloupětína přidat si jiné obyvatele mezi své přátele. Takovéto přátelství bylo vzájemné. Dokažte, že v Hloupětíně je takový člověk, že průměrný počet přátel všech jeho přátel není menší než průměrný počet přátel všech obyvatel Hloupětína.

Řešení. Označme M množinu všech obyvatel Hloupětína a vezměme funkci $f : M \to 2^M$, která přiřadí každému obyvateli množinu jeho přátel. Máme dokázat, že existuje člověk m_0, pro kterého platí

$$\frac{1}{|f(m_0)|} \sum_{m \in f(m_0)} |f(m)| \geq \frac{1}{|M|} \sum_{m \in M} |f(m)|.$$

Udělejme drobnou úpravu pro budoucí výpočty a můžeme se pustit do důkazu.

$$|M| \sum_{m \in f(m_0)} |f(m)| \geq |f(m_0)| \sum_{m \in M} |f(m)|.$$

Postupujme sporem. Předpokládejme, že pro každého obyvatele platí obrácená nerovnost a tyto rovnosti přes všechny obyvatele sečtěme.

$$\sum_{m_0 \in M} |M| \sum_{m \in f(m_0)} |f(m)| < \sum_{m_0 \in M} |f(m_0)| \sum_{m \in M} |f(m)|$$

$$|M| \sum_{m_0 \in M} \sum_{m \in f(m_0)} |f(m)| < \sum_{m_0 \in M} \sum_{m \in M} |f(m_0)||f(m)|$$

Na levé straně se každá hodnota $|f(m)|$ objeví v součtu tolikrát, kolik má m kamarádů - $|f(m)|$.

$$|M| \sum_{m \in M} |f(m)|^2 < \sum_{m \in M} |f(m)| \cdot \sum_{m \in M} |f(m)|$$

$$(1 + \cdots + 1) \sum_{m \in M} |f(m)|^2 < \left(\sum_{m \in M} 1 \cdot |f(m)| \right)^2$$

To ale odporuje známé Cauchy-Schwarzově nerovnosti. Tím je tvrzení dokázáno.