Řešení 4. série

Obarvování

Úloha 4.1. Matěj si hrál se svou přímkou. Obarvoval ji dvěma barvami, ale ať ji obarvoval jak chtěl, vždycky na ní našel tři body stejné barvy, z nichž jeden byl středem zbylých dvou. Zvládnete dokázat, že to platí pro každé dvoubarevné obarvení přímky?

Řešení. Dokažme toto tvrzení sporem. Pokusme se na přímce najít 3 body stejné barvy, z nichž jeden je středem zbylých dvou. Nechť je první barva, již umístíme, nazvána růžová a druhá bordó. Pak si můžeme zvolit na přímce dva libovolné růžové body A a B a jejich střed C obarvit na bordó. Dále mějme na přímce bod D ve vzdálenosti |AB| od bodu A takový, že D!=B a bod E ve vzdálenosti |AB| od bodu B takový, že E != A. Jelikož A a B jsou růžové a A je středem úsečky DB resp. B je středem úsečky AE, musíme body D a E obarvit na bordó. Nyní si však všimněme, že bod C je jak středem růžových bodů A a B, tak středem bordó bodů D a E -> ať ho obarvíme jakkoliv, vždy budeme mít na přímce tři body stejné barvy, z nichž jeden je středem zbylých dvou.

Úloha 4.2. Liběnka Matěje a jeho přímku zahanbila, když si přinesla rovnou celou rovinu. Půjčila si od Matěje jeho dvě barvy a v dvoubarevné rovině pak hledala také trojici bodů stejné barvy, tentokrát však tvořící rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že jej lze najít v každém takovém obarvení.

Řešení. V dôkaze trvdenia využijeme predpoklad z prvej úlohy. Na priamke vždy dokážeme nájsť 3 body rovnakej farby, kde jeden je stredom zvyšných dvoch. Nájdime teda na ľubovnej priamke roviny tieto body, nech majú farbu a, a označme ich A, B, C. Ďalej zvoľme body D, E, F tak, že všetky ležia na jednej polrovine určenej AB a trojuholníky ABD, BCE, ACF a DEF sú rovnostranné. Pokiaľ ľubovoľný z troch nových bodov má farbu a, našli sme hľadaný trojuholník. Pokiaľ žiaden nemá farbu a, majú všetky farbu b, teda dokopy tvoria takýto trojuholník. Čím sme dokázali, že vždy vieme nájsť takýto trojuholník.

Úloha 4.3. Po obědě se ke dvojici připojila i Bubla se svou vlastní rovinou. Bubla si svou rovinu obarvila takovým způsobem, že každá přímka v této rovině obsahovala body právě dvou barev. Na vás je určit, kolika barvami mohla být rovina obarvená. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč pro jiné počty barev takto rovinu obarvit nelze.)

Řešení. Předpokládáme, že každá přímka v rovině obsahuje body právě dvou barev. Označme n počet barev, kterými je rovina obarvena. Nyní pro každé n ukážeme zda lze rovinu obarvit n barvami tak, aby každá přímka v rovině obsahovala body právě dvou barev.

Pro $n = 1$: Každá přímka v rovině obsahuje body právě jedné barvy, což je spor s předpokladem. Rovina tedy musela být obarvena alespoň dvěma barvami.

Pro $n = 2$: Zvolme dvě různoběžky p, q a obarvěme je celé kromě jejich průsečíku P první barvou, dále touto barvou obarvěme kružnici libovolného poloměru se středem v P . Zbytek roviny obarvěme druhou barvou. Nyní přímky p i q obsahují body barvy jedna a bod P barvy dva, jsou tedy dvoubarevné. Přímky rovnoběžné s p (q) jsou barvy dva až na jejich průsečík s q (p), který je barvy jedna. A přímky procházející bodem P mají barvu dva kromě průsečíků s kružnicí barvy jedna. Všechny další přímky určitě protínají jak p, tak q a mají tak kromě bodů barvy dva alespoň dva body barvy jedna. Rovina tedy mohla být obarvena dvěma barvami.
Pro $n = 3$: Zvolme znovu dvě různoběžky p, q a až na průsečík P je obarvěme barvou jedna, průsečík P barvou dva a zbytek roviny barvou tři. Přímky p a q jsou barvy jedna až na bod P, který je barvy dva. Přímky rovnoběžné s p (q) mají barvu tři kromě bodu, kde protínají q (p) barvy jedna. Přímky procházející středem mají barvu tři až na bod P, kde je barva dva. Všechny ostatní přímky jsou barvy tři kromě dvou bodů, kde protínají p a q. Rovina mohla být obarvena i třemi barvami.
Pro $n >= 4$: Mějme čtyři body A, B, C, D po řadě barev a, b, c, d. Podle předpokladu žádné tři z těchto bodů neleží na přímce. Tyto body můžeme vždy rozdělit do dvojicí tak, že se přímky určené danými dvojicemi bodů protínají. Ať už má průsečík jakoukoli barvu, alespoň jedna přímka bude trojbarevná, což je spor s předpokladem. Rovina tedy mohla být obarvena pouze dvěma nebo třemi barvami.

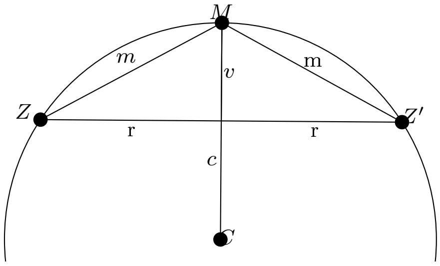
Úloha 4.4. K večeru se z práce vrátil Henry a všem vyrazil dech, když si začal obarvovat rovnou celý prostor. Každý bod v prostoru obarvil buď červeně, modře nebo zeleně. Potom si na červený papír zapsal všechny vzdálenosti některých dvou červených bodů a podobně to udělal s modrým a zeleným papírem (pro modré a zelené body). K jeho úžasu však ať už prostor obarvil jakkoliv, vždy jeden z papírů obsahoval všechna kladná reálná čísla. Vaším úkolem je toto tvrzení dokázat.

Řešení. Podle Ondřeje Svobody Budeme dokazovat sporem. Pro spor předpokládáme, že na každém papíru chybí alespoň jedno kladné reálné číslo. Vyberme od každé barvy některé chybějící číslo a označme je c, m, z (podle barev papíru). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $c \geq m \geq z$.

Od každé barvy musí být v prostoru alespoň jeden bod. Kdyby byly všechny body například pouze modré nebo zelené, stačilo by vybrat libovolný modrý bod. Sféra o poloměru m kolem něj by musela být celá zelená a byly by na ní tudíž určitě dva zelené body o vzdálenosti z, což by byl spor. A pokud by byly všechny body zelené, dostali bychom spor rovnou.

Nyní tedy už můžeme vybrat červený bod C a prozkoumat sféru se středem C a poloměrem c. Musí být celá modrozelená (nazvěme ji proto Země) a zároveň nemůže být celá zelená (našli bychom dva body o vzdálenosti z), takže na ní lze vybrat modrý bod M. Sféra se středem M a poloměrem m je celá červenozelená (říkejme jí Mars). Průnik Země a Marsu je kružnice, která je současně celá modrozelená i červenozelená, takže musí být celá zelená. Pokud by její průměr byl větší nebo roven z, měli bychom vyhráno, protože bychom na ní našli dva zelené body o vzdálenosti z a dostali bychom spor.

Kružnici označme jako k, její poloměr r. Kužel určený kružnicí k a vrcholem M má zřejmě (viz obrázek) tupý vrcholový úhel. Z toho plyne, že pro jeho výšku v platí $v \leq r$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak snadno dostáváme $2r \leq v + r \leq m \leq z$, což nám tedy konečně dává kýžený spor.



Úloha 4.5. Kouma s Ňoumou nemají barvičky moc rádi. K ostatním se proto nepřipojili a raději si hráli s přirozenými čísly z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$. Ňouma se snažil dokázat, že kterýchkoliv $n+1$ z nich obsahuje p, q taková, že p a q jsou nesoudělná, zatímco Kouma dokazoval, že mezi libovolnými $n+1$ z nich umí najít r, s taková, že r je celočíselným násobkem s. Vy určitě zvládnete dokázat obě tvrzení.

Řešení. *Ňoumovo tvrzení:* rozdělíme množinu na dvojice $2k-1, 2k, 1 \geq k \geq n$. Do těchto n dvojic musíme vložit $n+1$ čísel, dle dirichletova principu tedy musí být alespoň v jedné dvojici dvě čísla. Protože jsou ale dvě posobě jdoucí čísla nesoudělná, našli jsme p, q.

Koumovo tvrzení: Každé přirozené číslo můžeme zapsat ve tvaru $2^i \cdot l$, kde l je liché číslo a to jednoznačně. Můžeme tedy rozdělit všech $2n$ čísel do n skupin podle onoho lichého čísla. Dle DP opět v jedné skupině budou alespoň 2 z vybraných $n+1$ čísel. Ta jsou tvaru $2^i \cdot l$ a $2^j \cdot l$, BÚNO $i < j$. Pak ale $2^j \cdot l = 2^(j-i) \cdot 2^i \cdot l$, tedy jedno je celočíselným násobkem druhého, QED.

Úloha 4.6. Když Ňoumu omrzela přirozená čísla, řekl Koumovi, že našel nenulová reálná čísla x, y, z, jejichž součet je různý od nuly a která splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. Kouma z toho hned poznal, že některá dvě z těchto čísel se liší jen znaménkem. Dokažte to.

Řešení. Vynásobíme rovnici společným (nenulovým) jmenovatelem $xyz(x+y+z)$ a převedeme vše na jednu stranu. Získáme:

$$\begin{aligned}
(xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz &= 0 \\
x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 - xyz &= 0 \\
x^2(y + z) + x(y^2 + 2yz + z^2) + yz(y + z) &= 0 \\
(y + z)(x^2 + x(y + z) + yz) &= 0 \\
(y + z)(x + y)(x + z) &= 0
\end{aligned}$$

Tato rovnice má tři řešení: $y = -z$, $x = -y$, $x = -z$, a protože úpravy byly ekvivalentní, jsou to také jediná řešení rovnice původní. Všechna tři mají navíc tu vlastnost, že se dvě proměnné rovnají až na znaménko, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 4.7. Z Lenošína do Hloupětína přišlo poštou liché přirozené číslo k a také přirozené číslo n. Hloupětínské nenapadlo nic lepšího, než spočítat výraz $2 \cdot (1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k)$ a poslat ho zpět. V Lenošíně pak zjistili, že toto číslo je dělitelné číslem $n(n+1)$. Podaří se vám to dokázat?

Řešení. Jelikož jsou čísla n a $n+1$ nesoudělná, tak nám stačí dokázat, že zadaný výraz dělí čísla n a $n+1$. Rozlišme dva případy, kdy je n sudé a kdy liché. Pro oba případy si zvlášť přepíšeme daný součet a členy přeuspořádáme. Pro n sudé máme:

$$2\left(1^k + n^k + 2^k + (n-1)^k + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right) =$$

$$= 2\left(1^k + (n-1)^k + \dots + \left(\frac{n}{2}-1\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2}\right)^k + 2n^k$$

Pro liché n si součet upravme následovně:

$$2\left(1^k + n^k + \dots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+3}{2}\right)^k\right) + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k =$$

$$= 2\left(1^k + (n-1)^k + \dots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k\right) + 2n^k$$

V obou případech z prvního řádku a známého vztahu $a+b \mid a^k + b^k$ pro k liché vidíme, že je celý součet dělitelný číslem $n+1$. Z druhého řádku je zase jasná dělitelnost číslem n.