Řešení 3. série

Konstrukční geometrie

Úloha 3.1. Matěj si hrál se svým oblíbeným trojúhelníkem ABC. Vyznačil si na něm osu úhlu u vrcholu C, ale pak zafoukalo a vrchol C mu odvál vítr. Z trojúhelníku tak zbyly jen vrcholy A, B a zmíněná osa úhlu. Jak může Matěj trojúhelník znovu zkonstruovat?

Řešení. Řešení rozdělíme na dva případy: a) osa úhlu u vrcholu C je kolmá na stranu AB; b) osa úhlu není kolmá na AB.

a) Bod C může ležet kdekoli na ose tohoto úhlu kromě průsečíku osy se stranou AB a úloha má nekonečně mnoho řešení.

b) Řešení pomocí osové souměrnosti:

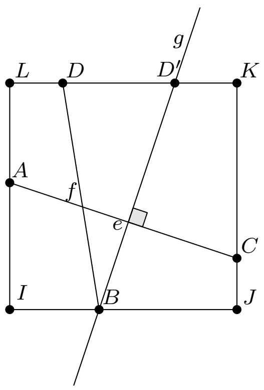
Osu úhlu u vrcholu C označíme jako o. Bod A zobrazíme v osové souměrnosti podle o na bod A' a sestrojíme přímku $A'B$. Průsečík této přímky s o je hledaný bod C a úloha má právě jedno řešení.

Řešení pomocí Švrčkova bodu:

Narýsujeme osu strany AB, její průsečík s osou úhlu u vrcholu C je Švrčkův bod, označíme ho tedy S_C. Sestrojíme kružnici k opsanou trojúhelníku ABS_C, tato kružnice je stejná, jako kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Bod C je tedy průsečík osy úhlu u vrcholu C a kružnice k. Úloha má právě jedno řešení.

Úloha 3.2. Ňouma si zrovna pročítal knihu zaměřenou na problematiku čtverců. Již v úvodní kapitole se opakuje, snad všem známá skutečnost, že pomocí znalosti velikosti jedné strany, lze takový čtverec sestrojit. „Hmm, to snad ví každý. Ale co kdybychom znali jiné parametry, než délku strany. Co například čtyři body takové, že na každé straně čtverce by byl umístěn právě jeden z nich.“ Ňouma se pustil do řešení své úlohy a čtverec sestrojil, sestrojte ho i vy.

Řešení. Bodem B vedeme kolmici na přímku AC. Na té sestrojíme bod D', tak aby $|AC| = |BD'|$. Sesrojíme přímku DD', z té pak vedeme kolmice body A a C a rovnoběžku bodem B. Je-li AC kolmá na BD, pak je libovolný opsaný obdélník také čtvercem, v opačném případě má úloha jediné řešení.



Úloha 3.3. Bubla má pokoj vytapetovaný tapetami s kruhovými ornamenty, proto nechce mít ještě k tomu kruhové nástěnné hodiny, aby pokoj nebyl „překolečkován“. Rozhodla se navrhnout si vlastní ciferník ve tvaru konvexního n-úhelníku, aby hodiny náležitě kontrastovaly. Vrcholy ciferníku označila postupně po směru hodinových ručiček čísly $1, 2, \cdots, n$. Vzdálenost mezi vrcholy i a j zaznačila jako a_{ij}. Svůj náčrt odnesla Matějovi a poprosila ho, jestli by jí takový ciferník nevyrobil. Kolik nejméně údajů a_{ij} je potřeba, aby Matěj jednoznačně vyrobil Bublin ciferník? (Shodné zobrazení neuvažujte).

Řešení. Chceme dokázat, že minimální počet údajů je $2n-3$, což je číslo, které dostaneme jednoduchou úvahou s jednou počáteční úsečkou. Ta je reprezentována jednou informací. K této úsečce přidáváme nové body, kdy každý další bod je reprezentován dvěmi informacemi. Přestože tyto dvě informace dávají dvě možné polohy bodu, můžeme jeden vyloučit z důvodu zachování konvexnosti. Na důkaz o minimu pro $2n-3$ můžeme jít přes matematickou indukci. Nejmenší číslo je $n = 3$. Poté je $2n - 3 = 3$.

K sestrojení trojúhelníku je potřeba znát všechny 3 strany, a to nám náš předpoklad $n = 3$ splňuje. Musíme nyní dokázat že při přidání jednoho bodu X k našemu n-úhleníku, musíme přidat nejméně 2 údaje, aby n-úhelník bylo možné jednoznačně sestrojit.

Pokud bychom měli pouze jeden údaj (vzdálenost XA), potom získáme množinu bodů, která má určitou vzdálenost od jednoho bodu - kružnici se středem v A. Jeden údaj tedy nestačí.

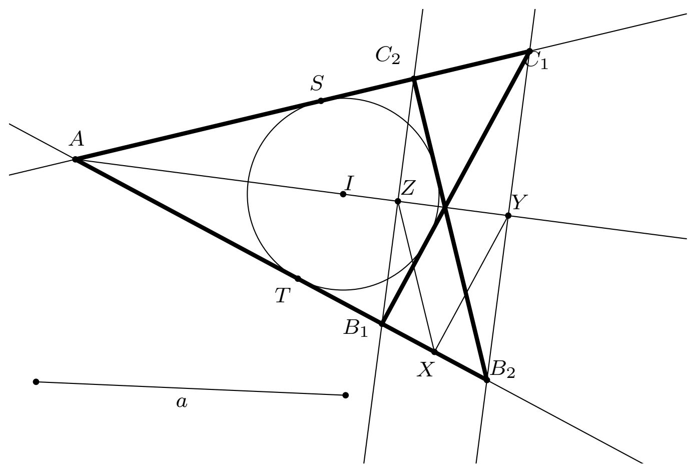
Při dvou údajích - máme vzdálenost XA a XB, poté můžeme sestrojit trojúhelník ABX. Máme dvě možnosti, kde mže bod X ležet. Pokud ani jedna z možností neporušuje podmínku konvexnosti, pak určitě platí, že bod X v každé možnosti leží mezi dvěma vrcholy, tím pádem má jiné číslo. Bod X je tedy dvěma údaji určen jednoznačně.

Úloha 3.4. Když byl Kouma malý, hrozně rád schovával věci a posléze si dělal obrázky, aby věděl, kde je má později hledat. Jednou takhle schoval golfový míček pod Večerníčkovskou čepici a ihned si zakreslil obrázek. Na obrázku byl míček zachycen jako kružnice vepsaná trojúhelníku, který symbolizoval čepici. Zkuste sestrojit trojúhelník ABC, který bude odpovídat Koumově čepici, máte-li v rovině umístěnou kružnici vepsanou (míček) a znáte-li vně kružnice bod A a délku strany a.

Řešení. První řešení: Označme I střed kružnice vepsané k. Sestrojíme tečny z A ke k, body dotyku označíme T a S (a nechť $B \in AS$). Uvažme body B' a C' jako obrazy bodů B a C v osové souměrnosti podle AI. Pak zřejmě $BB'CC'$ je rovnoramenný lichoběžník s úhlopříčkami délky a. Dále označme X střed $B'C$, $Y \in BB' \cap AI$, $Z \in CC' \cap AI$. Pak XZ a XY jsou střední příčky v trojúhelnících $B'CB$ a $B'CC'$, mají tedy tyto úsečky délku $a/2$. Dále však z vlastnosti tečen platí $|B'T| + |CT| = a$, takže také $|XT| = a/2$.

Teď tedy zpět ke konstrukci. Umíme najít bod X na AT tak, aby $|XT| = a/2$ a $|AT| < |AX|$. Pak umíme najít body Z a Y tak, aby $Z \in AI$, $|XZ| = a/2$ a $Y \in AI$ a $|XY| = a/2$. Dále spustíme kolmice na AI body Y a Z a jejich průsečíky s AT a AS už jsou námi hledané body BC.

Mohou nastat celkem tři případy: Zaprvé, body Y a Z neexistují (přímka AI je zkrátka moc daleko od X). Pak nemáme žádné řešení. Zadruhé, body Y a Z splývají. Pak máme jedno řešení a to rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. Zatřetí, body Y a Z existují a jsou různé, pak dostáváme dvě řešení v závislosti na tom, který průsečík kolmic s tečnami zvolíme.



Druhé řešení: Označme I střed kružnice vepsané k. Pak platí $|\sphericalangle IBC| = \frac{\beta}{2}$, $|\sphericalangle ICB| = \frac{\gamma}{2}$, protože I leží na osách úhlů ABC. Proto $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2} = 180° - \frac{180°-\alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Tento úhel však umíme sestrojit. Stačí sestrojit tečny z bodu A ke k. Jsou-li body dotyku T a S, pak $|\sphericalangle TAI| = \frac{\alpha}{2}$. Můžeme nyní zkontruovat trojúhelník XYZ takový, že $\triangle XYZ \cong \triangle BCI$. Začneme s $|XY| = a$. Pak zkontruujeme ekvigonálu $\varepsilon(XY; 90° + \frac{\alpha}{2})$ (ekvigonála je množina bodů, ze kterých je daná úsečka vidět pod daným úhlem, zpravidla dvojice kružnicových oblouků) a přímku p rovnoběžnou s XY ve vzdálenosti $|IT|$ od XY (poloměr kružnice vepsané). Bod Z je pak $Z \in p \cap \varepsilon$.
Následně už jen najdeme bod B na $\overrightarrow{AT}$ tak, aby $|BI| = |XZ|$ a bod C na $\overrightarrow{AS}$ tak, aby $|CI| = |YZ|$, přičemž požadujeme $|AT| < |AB|$ a $|AS| < |AC|$.
Nakonec získáme žádné, jedno nebo dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků p a ε.

Úloha 3.5. Liběnka si listovala svým sešitem z první třídy, když narazila na to, jak se učila číslice. V sešitě byla po obvodu kruhu napsána čísla 1, 2, ..., 9. Zavzpomínala, jak jí tenkrát dělalo problém je seřadit dle velikosti a při tom si všimla, že její řazení vykazuje zajímavou vlastnost: součet žádných dvou sousedních čísel není dělitelný 3, 5 ani 7. Vytvořte i vy takový kruh, který se povedl Liběnce.

Řešení. Začněme tím, že si rozepíšeme, které číslice mohou se kterými sousedit (pod podmínkou, že součet této číslice s jejím sousedem nebude dělitelný 3, 5 ani 7).

(1) — 3 a 7; (2) — 6 a 9; (3) — 1, 5 a 8; (4) -– 7 a 9; (5) -– 3, 6 a 8; (6) -– 2, 5 a 7; (7) – 1, 4, 6 a 9; (8) -– 3, 5 a 9; (9) -– 2, 4, 7 a 8.

Všimněme si, že 1, 2 a 4 mají jasně dané, mezi kterými číslicemi musí ležet, a jelikož jeden ze sousedů 4 je zároveň sousedem 1 a druhý sousedem 2, lze takto vytvořit jednoznačná posloupnost číslic za sebou následujících: 3, 1, 7, 4, 9, 2, 6

Nyní stačí rozhodnout, v jakém pořadí se v kruhu budou nacházet číslice 5 a 8. jelikož 6 + 8 je dělitelné 7, bude posloupnost číslic vypadat takto: 3, 1, 7, 4, 9, 2, 6, 5, 8 (cyklicky).

Úloha 3.6. Henry se rozhodl přivydělat a začal si hledat brigádu. Po několika dnech narazil na inzerát stavební firmy, která ho přijala na víkendovou výpomoc. Stavební firma právě rekonstruovala plácek v parku ve tvaru pravidelného šestiúhelníku o straně 2 m. Dlaždice, které se měly použít, měly tvar kosočtverce o straně 1 m a vnitřní úhel 60°. Henrymu se do práce nechtělo, tak začal přemýšlet, kolika způsoby by šla plocha šestiúhelníku těmito dlaždicemi vyskládat. Ve svých úvahách počítal otočení nebo zrcadlení za různé způsoby vyskládání. Kolik způsobů vyskládání Henry napočítal?

Řešení. První řešení: Dlaždice sú spojené vždy celou stranou, takže musia byť uložené rovnobežne s už uloženou dlaždicou, alebo stranou šesťuholníka. Začíname prikladať dlaždice, ktoré sú rovnobežné s vrchnou stranou šesťuholníka. Takých je presne osem. Všimnite si, že po uložení týchto ôsmich dlaždíc je uloženie ostatných dlaždíc jasne dané (pretože musia byť rovnobežné so zvyšnými stranami šsťuholníka, teda ich nemôžeme otáčať). Osem dlaždíc tvorí dva stĺpce, z toho každý stĺpec sa skladá z dvoch dlaždíc zatáčajúcich doľava (L), a dvoch doprava (P). Možné stĺpce zakódujme ako rôzne permutácie reťazca LLPP. Rôznych permutácií je 6, takže existuje $6 \cdot 6 = 36$ rôznych dvojíc stĺpcov. Niektoré dvojice stĺpcov sa po zakreslení prekrývajú, tým pádom nie sú valídne. Nie je problém všetky dvojice overiť a vybrať len tie, ktoré sa neprekrývajú. Najprv nakreslíme možnosť pre prvý stĺpec, a určíme, ktoré možnosti máme pre druhý. LLPP -> všetky možnosti (6), LPLP -> bez LLPP (5), LPPL -> iba LPPL, PPLL a PLPL (3), PPLL -> iba PPLL (1), PLPL -> iba PLPL a PPLL (2), PLLP -> iba PPLL, PLPL a PLLP (3). Dokopy existuje $6+5+3+1+2+3 = 20$ možností uloženia dlaždíc do šesťuholníka.

Druhé řešení: Všimneme si, že na korektně vyskládaný šestiúhelník lze nahlížet jako na otevřený box $2\times2\times2$, částečně naplněný kostičkami $1\times1\times1$, které jsou zarovnány co nejvíce dozadu a dolů (v tzv. izometrickém zobrazení). Pro počty kostiček 0,1,2,3,4,5,6,7,8 snadno určíme počty vyskládání jako 1,1,3,3,4,3,3,1,1. Celkem je tedy $1+1+3+3+4+3+3+1+1 = 20$ různých vyskládání.

Úloha 3.7. Už jste hráli nové Brkosí pexeso? Samozřejmě že ne, zatím se vyvíjí, ale již nyní prosákla z řad organizátorů informace o stylu hry. Na začátku se zvolí n kartiček (vždy se zvolí více než jedna), každá jiná. Kartičky můžeme očíslovat a zapsat jako množinu S, $S = \{1, 2, \cdots, n\}$. Tato cenná informace musí být ovšem vykoupena příkladem. Tedy nazvěme T_n počtem neprázdných podmnožin S takových, že aritmetický průměr jejích prvků je celé číslo. Dokažte, že $T_n - n$ je vždy sudé.

Řešení. Pro libovolnou množinu čísel $a_1, \ldots, a_n$, jejichž průměr je p platí, že přidáním čísla p do množiny se nezmění celkový průměr. Neboli $\frac{a_1+\cdots+a_n+p}{n+1} = \frac{pn+p}{n+1} = p$. Zřejmě navíc všechny celočíselné průměry podmnožin množiny S se nachází mezi 1 a n.

Všechny jednoprvkové podmnožiny mají celočíselný průměr a je jich celkem n. $T_n - n$ tedy vyjadřuje počet všech diskutovaných podmnožin s alespoň dvěma prvky. Vytvořím mezi nimi párování, kde do páru vždy přijdou dvojice množin, které se liší jen o přítomnost jediného prvku a to jejich průměru. Proto jich musí být sudý počet.