Řešení 2. série

DůKAZY

Úloha 2.1. Ňouma, který se pravidelně účastní Piškvorkové olympiády, si během každodenního tréninku na standardním čtverečkovém papíru (čtverečky o straně délky 1) všimnul zajímavé skutečnosti. Do této mřížky vyznačil tři průsečíky A, B, C. Vzdálenosti těchto bodů byly celočíselné. Zjistil, že obvod vzniklého trojúhelníku ABC je sudý. Dokažte, že toto tvrzení opravdu platí.

Řešení. Naše 3 body tvoří trojúhelník, jenž umístíme do kartézské soustavy souřadnic. Dále můžeme nadefinovat jejich vzdálenosti:

$$a = \sqrt{\Delta x_{CB}^2 + \Delta y_{CB}^2}$$
$$b = \sqrt{\Delta x_{AC}^2 + \Delta y_{AC}^2}$$
$$c = \sqrt{(\Delta x_{AC} + \Delta x_{CB})^2 + (\Delta y_{AC} + \Delta y_{CB})^2)}$$

Kde $\Delta x_{CB} = x_C - x_B$ a zbytek analogicky. Uvážíme-li vlastnost parity čísla, že při umocnění zůstává zachována (liché po umocnění zůstává liché), můžeme při ověření parity obvodu trojúhelníku využít i kvadráty stran a, b, c.

$$\Delta x_{CB}^2 + \Delta y_{CB}^2 + \Delta x_{AC}^2 + \Delta y_{AC}^2 + (\Delta x_{AC} + \Delta x_{CB})^2 + (\Delta y_{AC} + \Delta y_{CB})^2 =$$

$$2(\Delta x_{AC}^2 + \Delta x_{CB}\Delta x_{AC} + \Delta x_{CB}^2) + 2(\Delta y_{CB}^2 + \Delta y_{AC}\Delta y_{CB} + \Delta_{AC}^2)$$

Z čehož je zřejmé, že součet je dělitelný dvěma, tedy sudý.

Úloha 2.2. Liběnka nedávno navštívila vysokoškolskou přednášku z matematiky, kde přednášející předváděl údajně snadný příklad. Dlouho se ztrácela v jeho zadání a právě teď se zdá, že zadání pochopila. „Pan profesor řešil příklad, kde vyšel z tvrzení, že $2n + 1$ je druhá mocnina přirozeného čísla a pomocí něj dokázal, že výraz $n + 1$ je součtem dvou druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel.“ Jelikož Liběnka ještě na vysokou nechodí a povedlo se jí tento příklad vyřešit, zkuste to také a pošlete důkaz příkladu, který profesor předváděl.

Řešení. Jelikož 2n + 1 je čtverec a je lichý, je čtvercem lichého čísla. Můžeme tedy psát:

$$2n + 1 = (2k + 1)^2$$
$$2n = 4k^2 + 4k$$
$$n + 1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k + 1)^2$$

QED

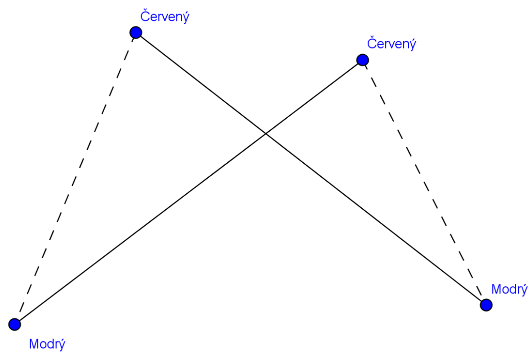
BRKOS Team 2015

Úloha 2.3. Bubla o prázdninách měla jiné starosti, než hledání zajímavých her nebo rébusů na dlouhé zimní večery. Čekala ji odložená zkouška na medicíně. A jak se neustále učila o různých nemocech a zraněních a o postupech operací, napadla ji také jedna operace, avšak matematická. O operaci $(a)_b$ (b působící na a) si poznamenala, že pokud $(a)_b = c$, pak také $(b)_c = a$. Chvilku si s touto operací hrála, ale potom si uvědomila, že se musí dále učit. Na papíře zůstal nadepsaný vztah $a = ((a)_a)_a = (\dots(a)_a\dots)_a$ (sudý počet provedení operace), který zbývá na vás, abyste jej dokázali.

Řešení. Budeme postupovat indukcí vůči počtu užití operace. Ten si označme $2n$.
Bázový krok: Zřejmě platí $(a)_a = (a)_a$. Užitím vztahu ze zadání dostáváme $(a)_{(a)_a} = a$. Opakovaným užitím pak $((a)_a)_a = a$.
Indukční krok: Z indukčního přepokladu víme, že platí $(...(a)_a...)_a = a$ pro $2n$ operací. Nejlevější a v tomto výrazu můžeme nahradit za $((a)_a)_a$. Tím dostáváme, že je výraz pravdivý i pro $2n + 2$ provedení operace.

Úloha 2.4. Liběnka objevila svůj umělecký talent a začala se svědomitě věnovat malbě. Zaujala ji technika pointillé, kterou se zdobily například zbraně. Dekorace vznikala pomocí dírek z nichž se skládaly obrazce, podobně jako z mozaiky. Liběnka se rozhodla, že tuto techniku vyzkouší, ale jelikož nemá žádnou zbraň, bude malovat na plátno. Plátno si napnula, aby tvořilo rovinu, a namalovala do něj n modrých a n červených bodů a to tak, že žádné tři body neležely na jedné přímce. Ale jako každý velký umělec, nedržela se zaběhnutých pravidel a rozhodla se každý modrý bod spojit s červeným. Dokažte, že lze spojit, vždy modrý s červeným, n úsečkami tak, aby se žádné dvě z těchto úseček neprotínaly.

Řešení. Uvažme takové spojení bodů, kdy je součet délek úseček minimální. Určitě takové najdeme, protože možností jak body pospojovat je konečný počet. Dokážeme sporem, že v takovém spojení se žádné dvě úsečky neprotínají. Nechť tedy existuje nějaké překřížení dvou úseček. Tyto úsečky musí tvořit úhlopříčky konvexního čtyřuhelníku (žádné tři body neleží na přímce). Z trojuhelníkové nerovnosti ale víme, že součet délek úhlopříček je větší než součet délek protilehlých stran čtyřuhelníku. Přepojíme-li tedy dvě dvojice bodů, aby tvořili protilehlé strany tohoto čtyřuhelníku, zmenší se součet délek všech úseček. To je spor s minimalitou.



Jiné řešení: Důkaz provedeme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy umíme pospojovat body bez křížení pro všechna $k \leq n$. Uvažme konvexní obal všech $2(n+1)$ barevných bodů. Pokud všechny body leží na tomto konvexním obalu, pak spojme nějakou dvoubarevnou dvojici sousedních bodů tohoto mnohouhelníku a pro zbylých n dvojic využijme indukční předpoklad. Nyní předpokládejme, že uvnitř tohoto konvexního obalu leží nějaký barevný bod P a veďme jím přímku, která neprotne žádný jiný barevný bod. Libovolně si orientujme přímku a definujme si levou a pravou stranu, kde P bude na pravé straně. Každá strana obsahuje neprázdný počet barevných bodů. V případě, že bude jedna strana obsahovat stejný počet modrých a červených bodů, pak dle indukčního předpokladu umíme obě strany pospojovat zvlášť. Otáčejme přímkou kolem P, dokud se tak nestane. Řekněme, že na začátku je na pravé straně B modrých a R červených bodů, kde $B > R$. Na levé straně pak bude zřejmě $n-B$ modrých a $n-R$ červených bodů. Otočme nyní přímkou o π. Na pravé straně bude nyní $n-B$ modrých a $n-R$ červených. Počet modrých bodů se bude snižovat z B na $n-B$ a počet červených se bude zvyšovat z R na $n-R$ a to po jednom (žádné tři barevné body neleží na přímce, naše přímka projde každým bodem zvlášť). Tyto hodnoty se musí v jeden moment potkat a my dostaneme náš kýžený stav.

Úloha 2.5. Henry o prázdninách navštívil incké vykopávky v Peru a během nich vyslechl zajímavý příběh o tajemném pokladu pevnosti Vilcabamba. Údajně se našla stříbrná destička s vyrytými několika prvočísly. Na zdivu se potom objevil výraz $2015! + 2016!$. Odborníci tuší jistou spojitost mezi nápisem na zdivu a destičkou, ale nikomu se tento rébus spojený s pokladem zatím nepodařilo vyřešit. Henry dostal nápad najít největší prvočíslo, které výraz $2015! + 2016!$ dělí. Najděte toto prvočíslo a třeba najdete i poklad. (Výraz $n!$ se čte „n faktoriál" a značí součin všech přirozených čísel od 1 do n, tedy $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Řešení. Z výrazu $2015! + 2016!$ vytkneme $2015!$, dostáváme $2015!(1 + 2016)$, což můžeme přepsat jako součin $2015! \cdot 2017$. Zjistíme, že 2017 je prvočíslo. 2015! je součin všech přirozených čísel menších nebo rovných 2015, žádné z čísel v tomto součinu tak určitě není vyšší než 2017 a zároveň prvočíslem. Největším prvočíslem dělícím výraz $2015! + 2016!$ je tedy 2017.

Úloha 2.6. Kouma s Ňoumou si vybírali čísla. K dispozici měli sadu čísel $1, 2, \dots, n$ každé právě jednou. Kolika způsoby si Kouma a Ňouma mohli čísla vybrat, pokud si každé číslo mohl vybrat jen jeden z nich, ale ne všechna čísla musela být vybrána?

Řešení. Přirozená čísla od 1 do n nám tvoří n-prvkovou množinu. Každý prvek (číslo) můžeme přiřadit do množiny čísel Koumy nebo množiny čísel Ňoumy nebo množiny čísel, které si nevybral nikdo. Každý prvek můžeme přiřadit pouze do jedné z tří množin. Hledáme počet různých kombinací rozdělení čísel. Za dvě různé kombinace se počítají takové trojice množin, kde se aspoň jedna ze tří množin v první kombinaci se nerovná příslušné množiny v druhé kombinaci. Z vlastností množin vychází, že nezáleží na pořadí čísel v jednotlivých množinách.
Teď si vezmeme jedno číslo. Můžeme ho přiřadit do jedné ze tří množin a tím pokaždé vytvoříme rozdílnou kombinaci. Toto přiřazení není nijak závisle na rozdělení ostatních čísel, a proto nám každé číslo zvýší počet kombinací trojnásobně. Protože máme n různých čísel, tak výsledný počet kombinací je 3^n.

(Alternativní vzorové řešení, které je kratší a nesnaží si hrát na neprůstřelné: Pro každé číslo může nastat jedna z těchto možností: bude ho mít Kouma, bude ho mít Ňouma, nebude ho mít nikdo. Protože výběr jednoho čísla nezávisí na ostatních, tak nám každé číslo zvyšuje počet kombinací třikrát. Tudíž počet všech kombinací je 3^n.)

Úloha 2.7. Matěj se rozhodl nějaký zajímavý problém nebo rébus najít v rodinné knihovně. Při prohlížení knih z jedné z nich vypadl starý papír, na němž byl vyobrazen konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Uvnitř něj byl umístěn bod X. Někdo dále do obrázku vyznačil body K, L, M, N jako těžiště trojúhelníků po řadě ABX, BCX, CDX, DAX. Pokud víme, že obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je 1, jaký je obsah čtyřúhelníku $KLMN$?

Řešení. V důkazu S_X značí obsah útvaru X. Označme středy stran $ABCD$ jako $E \in AB$,$F \in BC$,$G \in CD$,$H \in DA$. Pak EF, FG, GH, HE jsou po řadě střední příčky v trojúhelnících ABC, BCD, CDA, DAB. To znamená, že $S_{BEF} = S_{BAC}/4$, $S_{CFG} = S_{CBD}/4$, $S_{DGH} = S_{DCA}/4$, $S_{AHE} = S_{ADB}/4$. Zejména tedy $S_{BEF} + S_{DGH} = S_{ABCD}/4$ a $S_{AHE} + S_{CBD} = S_{ABCD}/4$. Proto také $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{BEF} + S_{DGH} + S_{AHE} + S_{CBD}) = S_{ABCD}/2$.
Dále si všimneme, že EX, FX, GX, HX jsou těžnice trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX a tedy body K, L, M, N leží ve dvou třetinách od bodu X na těchto úsečkách. Jinými slovy $KLMN$ je s $EFGH$ stejnolehlý s koeficientem stejnolehlosti $k = \frac{2}{3}$ a středem stejnolehlosti X. Tedy $S_{KLMN} = k^2 S_{EFGH} = \frac{2}{9}$, což je hledaný výsledek.