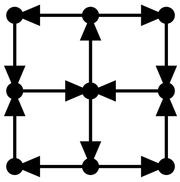
Řešení 1. série

Úvodní guláš

autor: *Stopa*

Úloha 1.1. Poslední prázdninové dny si Liběnka užívá hraním hry. Hrací pole se sestává z devíti polí spojených šipkami (viz obrázek). V každém tahu se nejprve pohnou již umístěné figurky dle šipek. Vedou-li z pole dvě šipky, figurka se rozdvojí a pokračuje na obě pole. Naopak setkají-li se dvě figurky na konci tohoto pohybu na jednom poli, navzájem se vyhodí a na poli nezůstane žádná. Po tomto pohybu Liběnka umístí figurku na libovolné políčko. Cílem hry je zaplnit všechna políčka figurkami. Jak to může Liběnka provést?



Řešení. V hracím poli se vyskytují čtyři typy políček. Políčka v rohu, ty označíme R, políčko ve středu, označme S, políčka, ze kterých vede šipka do středu, D a políčka, do kterých vede šipka ze středu, Z. Jako řešení je uvedena posloupnost políček, na která Liběnka umisťuje v jednotlivých tazích figurku. Nejčastějším řešením bylo R, R, R, R, S. Dalším řešením je například R, R, Z, D nebo D, Z, S, S. (Hrací pole je symetrické, figurku tak můžeme umístit na libovolné políčko s požadovaným označením.)

Úloha 1.2. Henry a jeho žena se spolu s dalšími čtyřmi páry zúčastnili letní slavnosti. U přípitku si každý nejprve přiťukl se svým partnerem a poté si přiťukli i s některými dalšími. Henry se na závěr každého z devíti ostatních hostů zeptal, s kolika lidmi si přiťukl. K jeho překvapení mu každý oznámil jiné číslo. S kolika lidmi si přiťukla Henryho žena?

Řešení. Každý z hostů si přiťukl nejméně s jedním a nejvíce s devíti hosty. Protože si každý z hostů kromě Henryho přiťukl s různým počtem lidí, museli být počty jejich přiťuknutí všechna čísla mezi jednou a devíti. Označme si tyto hosty čísly od jedné do devíti, podle počtu jejich přiťuknutí. Devítka si musela přiťuknout se všemi hosty, kromě sebe. Jednička si přiťukla pouze se svým partnerem. Devítka s jedničkou tedy byli pár. Osmička si musela přiťuknout se všemi hosty, kromě sebe a jedničky. Dvojka si přiťukla pouze se svým partnerem a devítkou. Osmička s dvojkou tedy byli pár. Sedmička si musela přiťuknout se všemi hosty, kromě sebe, jedničky a dvojky. Trojka si přiťukla pouze se svým partnerem, devítkou a osmičkou. Sedmička s trojkou tedy byli pár. Šestka si musela přiťuknout se všemi hosty, kromě sebe, jedničky, dvojky a trojky. Čtyřka si přiťukla pouze se svým partnerem, devítkou, osmičkou a sedmičkou. Šestka se čtyřkou tedy byli pár. Pětka nemohla být v páru s nikým jiným, než s Henrym, byla to tedy jeho žena.

Úloha 1.3. To Matěj většinu prázdnin strávil s Bublou za městem u rybníka. Zrovna seděli na břehu a házeli žabky, když Bubla zvolala: „Matěji, teď se na té vodě objevilo pět kol ve tvaru různých kružnic a každé čtyři z nich měly společný alespoň jeden bod!“ Matěj se zaradoval: „Ale to znamená, že také všech pět dohromady prochází jediným bodem!“ Vaším úkolem je tuto vlastnost dokázat.

Řešení. Připusťme, že existuje konfigurace vyhovující zadání, která přitom nemá bod, kterým by procházelo všech 5 kružnic. Označme si oněch 5 kružnic a, b, c, d, e. Nyní uvažujme následující tři průsečíky 4 kružnic, jejichž existenci máme zaručenu ze zadání: $X \in a \cap b \cap c \cap d$, $Y \in a \cap b \cap d \cap e$, $Z \in a \cap b \cap e \cap c$. Žádné z těchto 3 bodů nemohou splývat, neboť by těmito body procházelo všech 5 kružnic. Zároveň však všechny 3 body leží na obou kružnicích a, b. Tři různé body ale jednoznačně určují kružnici, která jimi prochází. Tedy $a = b$, což je spor se zadáním.

Úloha 1.4. Henry měl na ledničce z magnetických cifer poskládanou nějakou mocninu dvojky (číslo tvaru 2^k pro nějaké přirozené k) v desítkovém zápisu. Kolemjdoucí Ňouma ale o ledničku zavadil a všechny cifry z ledničky popadaly. Koumu hned napadlo, jestli by bylo možné všechny cifry naskládat zpět, aby vznikla jiná mocnina dvojky (z pochopitelných důvodů nesmí být nula na začátku zápisu čísla).

Řešení. Sporem dokážeme, že jiná mocnina dvojky vzniknout nemohla. Předpokládejme tedy, že existují čísla 2^a a 2^b $(a > b)$ složená ze stejných cifer v desítkovém zápisu. Jejich podíl 2^{a-b} může být jedině 2, 4 nebo 8, protože deseti a více násobek kladného celého čísla má větší počet cifer. Navíc ale víme, že každé číslo dává po dělení devíti stejný zbytek jako jeho ciferný součet. To snadno dokážeme z desítkového zápisu:

$$\begin{aligned}10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 =& ((10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots \\ & \cdots + (10 - 1)a_1) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)\end{aligned}$$

První část obsahuje pouze čísla dělitelná devíti ($10^n - 1$ se v desítkové soustavě napíše jako n devítek), zatímco druhá část je právě ciferný součet.

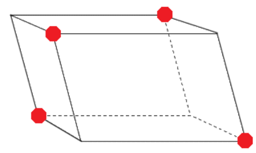
Pokud jsou dvě čísla složena ze stejných cifer, mají stejný ciferný součet a tedy také stejný zbytek po dělení devíti. Jejich rozdíl je tedy dělitelný devíti. Ale jejich rozdíl je $2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$ a to zřejmě devíti dělitelné být nemůže, protože druhý člen může nabývat pouze hodnot 1, 3 nebo 7.

Úloha 1.5. Bubla si pořídila na dveře nový číselný zámek. Vybrala si ten nejlevnější na trhu. Klávesnice měla pouze dvě tlačítka: 0 a 1 a kód byl čtyřmístná posloupnost těchto dvou znaků. Matěj hned přemýšlel jak se co nejefektivněji dostat dovnitř. Najděte nejkratší posloupnost znaků 0 a 1 obsahující všechny možné kódy (alespoň jednu). Nezapomeňte na zdůvodnění, proč již nemůže být kratší.

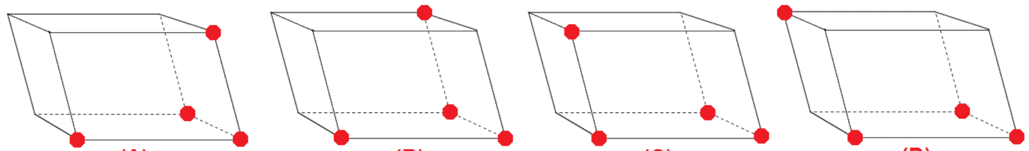
Řešení. Všech jednotlivých kódů je 2^4, tedy 16, kde každý je čtyřmístný. Nejkratší řetězec, který nám může vzniknout, musí tedy začínat jedním z těchto kódů. Přidáváním 0 či 1 za řetězec pak dostáváme postupně všechny kombinace, ve finále tedy bude nejkratší řetězec dlouhý 19 znaků (4 znaky první kód, +1 každý další). Nyní stačí ukázat na příkladu, že jsme kódy schopni na sebe takto naskládat. Této délce vyhovuje např.: 1100100001111010110

Úloha 1.6. V Hloupětíně na náměstí už zase stavěli monument. Tentokrát šlo o opravdu ambiciózní projekt. Byly zvoleny čtyři body v prostoru neležící v jedné rovině a bylo dohodnuto, že bude sestaven rovnoběžnostěn mající čtyři z osmi vrcholů v těchto bodech. Radní se však neshodli na konkrétní podobě rovnoběžnostěnu. Kolik existuje různých rovnoběžnostěnů se čtyřmi vrcholy v těchto bodech? (Rovnoběžnostěn je čtyřboký hranol s podstavou rovnoběžníku, má tedy šest stěn ve tvaru rovnoběžníku.)

Řešení. Každý vrchol v rovnoběžnostěnu je společný právě třem stěnám. My máme zadané 4 body, proto nutně budou na každé stěně ležet právě dva nebo na alespoň jedné stěně budou ležet právě tři. Snadno se přesvědčíme, že v prvním případě dostáváme jednoznačně daný rovnoběžnostěn.



Pokud na alespoň jedné stěně leží tři z našich zadaných bodů, pak pro umístění čtvrtého máme čtyři možnosti:



Rovnoběžnostěnů typu (A) je čtyři, čtyřmi způsoby totiž vybereme bod sousedící se všemi ostatními. Počet rovnoběžnostěnů (B), (C) je šest od každého, $\binom{4}{2} = 6$ způsoby vybereme dvě dvojice vrcholů na jedné hraně. Dvanáct možností konečně dostaneme v případě (D), čtyřmi způsoby vybereme horní osamocený bod a třemi vybereme prostřední dolní.

Hledaný celkový počet rovnoběžnostěnů je 1+4+6+6+12=29.

Jiné řešení V rovnoběžnostěnu můžeme čtveřici vrcholů vybrat $\binom{8}{4} = 70$ způsoby. Z nich 12 možností musíme ihned vyloučit, protože odpovídají všech čtyřem vrcholům v jedné rovině. Avšak rovnoběžnostěn má středovou symetrii, a tak ke každé čtveřici existuje jiná, která zadává tentýž rovnoběžnostěn. Celkem máme tedy $\frac{70-12}{2} = 29$

Úloha 1.7. V Lenošíně na obecní tabuli bylo napsáno číslo 7^{2015} v desítkové soustavě. Obecní matematik postupně vždy smaže poslední cifru (jednotky) a ke zbytku přičte pětinásobek smazaného. Může tímto způsobem na tabuli vzniknout číslo 2015^7? Svou odpověď řádně zdůvodněte.

Řešení. Mějme číslo n_0 a jeho poslední cifru a. Po provedení operace popsané v zadání získáme číslo:

$$n_1 = (n_0 - a)/10 + 5a = (n_0 + 49a)/10$$

Vidíme, že k n_0 přičítáme číslo dělitelné 7 a pak ho dělíme 10, což je číslo nesoudělné se 7. To znamená, že pokud je dělitelné 7 číslo n_0, tak je dělitelné 7 i n_1. Číslo 7^{2015} je zřejmě dělitelné 7. Číslo 2015^7 rozložíme na prvočinitele: $2015^7 = 5^7 \cdot 13^7 \cdot 31^7$. Z rozkladu vidíme, že 2015^7 není dělitelné 7 a proto nemůže vzniknout z čísla 7^{2015}.