Řešení 6. série

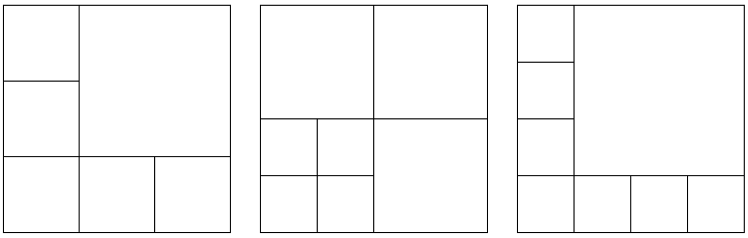
Obdélníky

autor: *Stopa*

Úloha 6.1. Matěj chystal jmenovky na velkou oslavu, která měla být toho dne odpoledne. Měl na to připravený velký obdélníkový kus barevného papíru o stranách 1 a 2. Jmenovka byla obdélník libovolné velikosti se stranami v poměru 1:2. „Já nevím, kolik přijde lidí,“ postěžoval si Matěj Liběnce. „Ale to přece nevadí, budeš tu ty, já, Henry, Bubla, Kouma a Ňouma, a tak umíme vyrobit přesný počet jmenovek, ať už přijde kdokoliv další.“ Ukažte, že obdélník o stranách 1 a 2 lze rozdělit na n (ne nutně shodných) obdélníků s poměrem stran 1:2, pokud $n \geq 6$.

Řešení. Podívejme se nejprve, jak rozdělit čtverec na šest a více čtverců. Později toto řešení převedeme na původní problém. Ochudíme se sice o rozdělení na pět dílků, ale se čtverci se nám bude snadněji pracovat.

Takto lze rozdělit na 6, 7 nebo 8 čtverců:



Existuje-li rozdělení na k čtverců, existuje i rozdělení na $k+3$ čtverců. Stačí rozdělit jeden z těchto k čtverců na čtyři stejně velké čtverce. Každé přirozené číslo větší než osm lze zapsat jako součet 6, 7 nebo 8 a nějakého násobku tří, a tak pro každé číslo $n \geq 6$ umíme rozdělit čtverec na n menších čtverců.

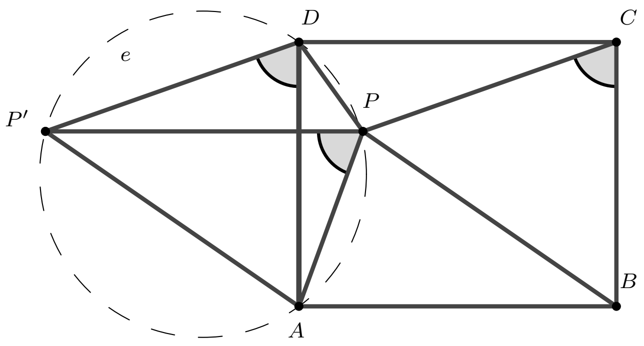
Roztáhneme-li všechny dílky takto rozděleného čtverce ve směru rovnoběžném s jednou z jeho stran na dvojnásobnou délku, dostáváme rozdělení obdélníku s poměrem stran 2:1 na obdélníky s poměrem 2:1.

Pro zajímavost dodejme, že ačkoliv čtverec na pět menších čtverců rozdělit nelze, obdélník ze zadání na pět menších dílů rozdělit lze. Způsob, jak to provést už ale necháme na vás.

Úloha 6.2. Henry se na oslavě samozřejmě jako vždy chtěl pořádně vytáhnout a ukázal všem svůj obdélník $ABCD$ s bodem P uvnitř. „Podívejte se!“ volal na všechny přítomné, „platí, že $|\sphericalangle APD| + |\sphericalangle BPC| = 180°$!“ Liběnka počkala, než ustalo pozdvižení, které takové tvrzení v sále vyvolalo a pak se otočila na Henryho: „Ale pokud platí to, co říkáš, kolik pak je $|\sphericalangle PAD| + |\sphericalangle PCB|$?“

Řešení. Nechť P je obraz bodu P v posunutí o vektor $\vec{BA}$ jako na obrázku:

Posunutí je shodné zobrazení a tudíž zachovává velikosti úhlů. V našem posunutí se body B, C, P zobrazí po řadě na body A, D, P'. Proto jsou trojúhelníky BPC a $AP'D$



shodné a $|\sphericalangle B|PC| = |\sphericalangle A|P'D|$. Ze zadání víme, že $|\sphericalangle A|PD| + |\sphericalangle B|PC| = 180°$. Proto také

$$|\sphericalangle A|PD| + |\sphericalangle A|P'D| = 180°.$$

Z toho plyne, že $APDP'$ je tětivový. (Protože je P uvnitř $ABCD$, leží P' v opačné polorovině určené přímkou AD.) Proto platí

$$|\sphericalangle A|PP'| = |\sphericalangle A|DP'| = |\sphericalangle B|CP|,$$

neboť jsou trojúhelníky BPC a $AP'D$ shodné.

Vektory $\vec{BA}$ a $\vec{PP'}$ jsou kolineární a přímky PP a AB jsou rovnoběžné. Označme $X \in AD \cap PP'$. Protože $ABCD$ je pravoúhelník, je $|\sphericalangle A|XP| = 90°$. Proto $|\sphericalangle P|AX| + |\sphericalangle A|PX| = 90°$ a dostáváme

$$|\sphericalangle D|AP| + |\sphericalangle B|CP| = |\sphericalangle P|AX| + |\sphericalangle A|PP'| = |\sphericalangle P|AX| + |\sphericalangle A|PX| = 90°.$$

Úloha 6.3. Bubla se nenechala Henryho obdélníkem vyvést z míry a hned se také předvedla: „To já mám obdélníků hned nekonečně mnoho! A to není všechno. Všechny je mám umístěné v kartézském souřadnicovém systému a všechny mají strany rovnoběžné s osami, jeden vrchol v bodě $[0,0]$ a protější vrchol v bodě $[p,q]$, kde p a q jsou nějaká nenulová celá čísla.“ (Bubliny obdélníky mají vrcholy s celočíselnými souřadnicemi, ale ne každý bod s celočíselnými souřadnicemi musí být vrcholem nějakého bublina obdélníku.) Tentokrát to byl Matěj, kdo promluvil do hlasitého šumu obecenstva: „Ale to znamená, že některý z tvých obdélníků je celý překrytý nějakým jiným! To je přece skandální!“ Dokažte Matějovo tvrzení.

Řešení. Mějme nekonečnou množinu obdélníků jako v zadání. Každý obdélník můžeme ztotožnit s jeho vrcholem $[p,q]$ protilehlým k $[0,0]$, protože tento ho jednoznačně určuje.

Pro jednoduchost nejdříve předpokládejme, že všechny obdélníky leží v prvním kvadrantu. Pokud existují dva obdélníky $[p,q]$ a $[p',q']$ takové, že $p = p'$ nebo $q = q'$, zřejmě jeden z nich musí překrývat druhý. Předpokládejme tedy, že libovolné dva obdélníky se liší v obou souřadnicích a uvažme obdélník $[p_0,q_0]$ s nejmenší x-ovou souřadnicí. Protože obdélníků je nekonečně mnoho, existuje obdélník $[p_1,q_1]$ takový, že $q_0 < q_1$. Zároveň však platí $p_0 < p_1$ podle volby obdélníku $[p_0,q_0]$. Obdélník $[p_1,q_1]$ tedy překrývá obdélník $[p_0,q_0]$.

V obecném případě leží libovolný obdélník právě v jednom kvadrantu, proto se můžeme omezit na některý kvadrant, ve kterém leží nekonečně mnoho obdélníků a důkaz vést zcela analogicky.

Úloha 6.4. „Vy a ty vaše obdélníky," uchechtl se Kouma. „To já jsem si donesl pravidelný $4n$-úhelník o straně 1, podívejte se, jak–" Nedokončil však větu, protože si všiml, že Ňouma vedle něj má v ruce nůžky a stříhá jeho $4n$-úhelník na rovnoběžníky. Kouma jen zíral s otevřenou pusou, ale Ňouma dokončil stříhání a z konečně mnoha rovnoběžníků, které nastříhal (nic dalšího mu z $4n$-úhelníku nezbylo), začal vybírat ty, které byly zároveň obdélníky. Až je všechny povybíral, sečetl jejich obsah a vykřikl jej do placu. Jaké číslo mohl Ňouma zvolat?

Řešení. Nejprve ukážeme, jak lze $4n$-úhelníkem „projít" určitým způsobem od některé strany ke straně protější. Vyberme si některý rovnoběžník, jehož jedna strana leží na „horní" straně $4n$-úhelníku. Na něm započneme cestu. Jeho protější strana je s ním rovnoběžná, dále tedy půjdeme přes kterýkoliv rovnoběžník „napojený" na tuto stranu. Pokračujeme dále sérií kroků přes vzájemně rovnoběžné strany a protože rovnoběžníků je konečně mnoho a pohybujeme se vždy dolů, musíme nakonec skončit na „spodní" straně $4n$-úhelníku.

Nyní, když jsme si této skutečnosti vědomi, zadefinujme *cestu*. Cesta mezi dvěma protějšími stranami $4n$-úhelníků je množina všech rovnoběžníků, které jsme mohli navštívit výše popsaným způsobem pokud jednu z těchto dvou stran budeme považovat za „horní" a druhou za „spodní". Protože protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé a také „horní" i „spodní" strany mají tutéž délku, musí mít cesta stále tutéž „šířku" rovnu 1 (ačkoliv nemusí jít o jednoduše souvislou oblast – cesta se může například rozdělit na dvě menší a později zase sloučit). Všimněme si, že všechny rovnoběžníky tvořící cestu mají dvě své strany rovnoběžné s příslušnou dvojicí protějších stran $4n$-úhelníku. Navíc je jasné, že každý rovnoběžník přísluší do právě dvou cest. Jedna cesta pro každou dvojici protějších stran rovnoběžníku. Důsledek toho je, že průnik libovolných dvou cest je složen z celých rovnoběžníků.

Protože jde o $4n$-úhelník, existuje ke každé dvojici stran další dvojice stran, která je jen otočením o pravý úhel kolem středu $4n$-úhelníku. Tyto strany jsou tedy navzájem kolmé. Průnik těchto cest je tvořen rovnoběžníky, které nutně musí mít navzájem kolmé strany a jde tedy o obdélníky. Navíc „šířka" v obou vzájemně kolmých směrech je, jak jsme již dříve uvedli, shodná se stranou $4n$-úhelníku a je tedy rovna 1. To ale znamená, že celá tahle oblast musí mít obsah 1 (Cavalierův princip). Takovýchto dvojic „kolmých" cest je v $4n$-úhelníku celkem n různých, pro každou z nich získáme na průniku obdélníky o celkovém obsahu 1 a celkový obsah všech obdélníků tedy musí být roven n.

Úloha 6.5. Po Ňoumově výstupu měli všichni plné zuby obdélníků. Raději si označili ciferný součet přirozeného čísla n jako $C(n)$ a pak se snažili najít takové číslo, že $n + C(n) + C(C(n)) = 2015$. Najděte také všechna taková přirozená čísla.

Řešení. Zapišme libovolné přirozené číslo p v desítkové soustavě jako $p = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$. Pak $C(p) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ a $p - C(p) = (10^k - 1)a_k + (10^{k-1} - 1)a_{k-1} + \cdots + (10 - 1)a_1$. Číslo $10^l - 1$ je pro libovolné kladné přirozené l v desítkové soustavě složeno z l devítek a je tedy dělitelné třemi. $p - C(p)$ je tak součtem čísel dělitelných třemi a samo tedy musí třemi být dělitelné. To znamená, že p a $C(p)$ dávají stejný zbytek po dělení třemi.

Aplikujme teď tento poznatek na naši úlohu. Předpokládejme, že nějaké přirozené n splní rovnici ze zadání. Zjistíme, že n, $C(n)$ i $C(C(n))$ musí dávat stejný zbytek po dělení třemi. To znamená, že jejich součet je třemi dělitelný. Na druhou stranu však je tento součet roven 2015 a to rozhodně není číslo dělitelné třemi. Předpoklad nás tedy dovedl ke sporu a jediný možný závěr je, že zadaná rovnice nemá žádné řešení.

Úloha 6.6. A nebyla by to Bubla, kdy si zase nepřisadila: „Pche, rovnice... Já jich mám hned pět! Cílem je najít všechna reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, která jsou řešením systému následujících rovnic:“

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3^2 \\ x_2 + x_3 &= x_4^2 \\ x_3 + x_4 &= x_5^2 \\ x_4 + x_5 &= x_1^2 \\ x_5 + x_1 &= x_2^2 \end{aligned}$$

Řešení. Vojta Suchánek: Předpokládejme, že jedno z čísel je nulové, BÚNO (bez újmy na obecnosti) x_1, protože rovnice jsou pouze svými cyklickými záměnami. Dostáváme:

$$x_4 = -x_5 \Rightarrow x_4^2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = x_5^2 \Rightarrow x_2 = x_4$$

$$x_5 = x_2^2 = -x_4 = -x_2$$

Tedy buď $x_2 = -1$ nebo $x_2 = 0$. Protože ale $x_2 = x_3^2 \geq 0$, pak nutně $x_2 = 0$. Cyklicky dostaneme i postupně $x_3, x_4, x_5 = 0$.
Nyní už předpokládejme, že neznámé jsou nenulové. Rovnice jsou cyklické, mohu tedy BÚNO říct, že x_5 je největší z nich. Zjevně nejsou všechny neznámé záporné (právé strany jsou nezáporné), proto $x_5 > 0$. Předpokládejme, že $x_5 > 2$, pak $x_3 + x_4 = x_5^2 > 2x_5$, ale $x_3 \leq x_5$ a $x_4 \leq x_5$ - spor. Proto jsou všechny neznámé menší nebo rovny dvěma.

Nyní podobně uvažme nejmenší neznámou, třeba zase x_5. Rozberme případ, kdy $x_5 < 0$. Platí $x_1^2 > 0 \Rightarrow x_4 + x_5 > 0 \Rightarrow x_4 > -x_5 > x_5 \Rightarrow x_4 > |x_5|$. Pokud navíc $x_3 \geq |x_5|$, pak $x_3 + x_4 > 2|x_5|$. My ale víme, že $x_3 + x_4 = x_5^2 \leq 2|x_5|$, což je spor. Nutně tedy $x_3 < |x_5| = -x_5$. I tento případ snadno vysporujeme:

$$0 > x_3 + x_5 = (x_4^2 - x_2) + (x_2^2 - x_1) = x_4^2 - (x_3^2 - x_1) + x_2^2 - x_1 \Rightarrow x_3^2 > x_4^2 + x_2^2$$

Protože ale $x_4^2 \geq x_5^2 > x_3^2$, máme konečně spor s předpokladem, že $x_5 < 0$. Všechny neznámé jsou proto kladné. Je-li ale $x_5 < 2$, pak $x_3 + x_4 = x_5^2 < 2x_5$. K tomu platí $x_3, x_4 \geq x_5$. Máme tedy opět spor. Nutně tedy $x_5 = 2$, což znamená, že už i $x_3 = x_4 = x_5 = x_1 = x_2 = 2$.

Existují dvě řešení:

$$K = \{(0, 0, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2, 2)\}$$

Úloha 6.7. Na závěr celé oslavy proběhla večeře v restauraci. Všech $2n$ lidí se vešlo k jednomu kulatému stolu. Každý si objednal něco jiného, ale číšník byl popleta, nezapamatoval si, kdo co chtěl, a rozdal jim tak jídla náhodně. Henry ale situaci zachránil, když ostatní přesvědčil, že ať už to číšník rozdal jakkoliv, lze stůl otočit tak, aby alespoň dva lidé měli večeři, kterou si objednali. Dokažte, že má Henry pravdu.

Řešení. Úlohu dokazujme sporem, tedy předpokládejme pro spor, že číšník rozdal jídla tak, že při žádném otočení stolu nebudou mít dva strávníci to, co si objednali.

Nejprve si očíslujme hosty postupně po směru hodinových ručiček od 1 do $2n$. Dále označme způsob, jakým číšník objednávku popletl. Uvažujme, že každé jídlo posunul o určitý počet míst po směru hodinových ručiček (číslo od 1 do $2n$). Formálně nechť jídlo, jež si objednal host k posunul o a_k míst.

Z předpokladu je jasné, že žádná dvě jídla neposunul o stejný počet míst, a protože jídel je $2n$ a možných posunutí, jak jsme je definovali, je též $2n$, musí být každé posunutí využito právě jednou. Formálně řečeno je $(a_1, \ldots, a_{2n})$ permutací $(1, \ldots, 2n)$.

Očíslujme si nyní místa čísly 1 až $2n$. Je jasné, že součet všech míst, na kterých sedí hosté se musí rovnat součtu míst, na kterých jsou položená jídla (jde o tatáž místa). Musí se tedy rovnat také zbytky těchto součtů po dělení $2n$. Teď pojďme tyto zbytky spočítat.

U hostů je to jednoduché, půjde jednoduše o součet všech přirozených čísel od 1 do $2n$ a ten je roven $1 + 2 + \cdots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$). Toto číslo zřejmě dává zbytek n po dělení $2n$.

Nyní místo, na kterém je jídlo objednané hostem z místa k je posunuté a_k míst a až na případné přičtení/odečtení $2n$ jde tedy o místo $k + a_k$. Toto přičtení/odečtení nebude mít žádný vliv na zbytek konečného součtu po dělení $2n$ a nebudeme se jím tedy zabývat. Součet je tedy až na násobek $2n$ roven $1+a_1+2+a_2+\cdots+2n+a_{2n} = 1+\cdots+2n+a_1+\cdots+a_{2n} = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1)$, což ale dává zbytek 0 po dělení n.

Došli jsme tedy k tomu, že totéž číslo dává zároveň zbytek 0 a zároveň zbytek n po dělení $2n$. Pro nenulové n to je ale kýžený spor, a tvrzení je tak dokázáno.

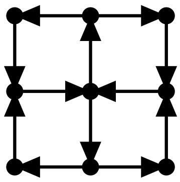
Zadání 1. série

Úvodní guláš

Termín odeslání: 26.10.2015

autor: *Stopa*

Úloha 1.1. Poslední prázdninové dny si Liběnka užívá hraním hry. Hrací pole se sestává z devíti polí spojených šipkami (viz obrázek). V každém tahu se nejprve pohnou již umístěné figurky dle šipek. Vedou-li z pole dvě šipky, figurka se rozdvojí a pokračuje na obě pole. Naopak setkají-li se dvě figurky na konci tohoto pohybu na jednom poli, navzájem se vyhodí a na poli nezůstane žádná. Po tomto pohybu Liběnka umístí figurku na libovolné políčko. Cílem hry je zaplnit všechna políčka figurkami. Jak to může Liběnka provést?



Úloha 1.2. Henry a jeho žena se spolu s dalšími čtyřmi páry zúčastnili letní slavnosti. U přípitku si každý nejprve přiťukl se svým partnerem a poté si přiťukli i s některými dalšími. Henry se na závěr každého z devíti ostatních hostů zeptal, s kolika lidmi si přiťukl. K jeho překvapení mu každý oznámil jiné číslo. S kolika lidmi si přiťukla Henryho žena?

Úloha 1.3. To Matěj většinu prázdnin strávil s Bublou za městem u rybníka. Zrovna seděli na břehu a házeli žabky, když Bubla zvolala: „Matěji, teď se na té vodě objevilo pět kol ve tvaru různých kružnic a každé čtyři z nich měly společný alespoň jeden bod!“ Matěj se zaradoval: „Ale to znamená, že také všech pět dohromady prochází jediným bodem!“ Vaším úkolem je tuto vlastnost dokázat.

Úloha 1.4. Henry měl na ledničce z magnetických cifer poskládanou nějakou mocninu dvojky (číslo tvaru 2^k pro nějaké přirozené k) v desítkovém zápisu. Kolemjdoucí Ňouma ale o ledničku zavadil a všechny cifry z ledničky popadaly. Koumu hned napadlo, jestli by bylo možné všechny cifry naskládat zpět, aby vznikla jiná mocnina dvojky (z pochopitelných důvodů nesmí být nula na začátku zápisu čísla).

Úloha 1.5. Bubla si pořídila na dveře nový číselný zámek. Vybrala si ten nejlevnější na trhu. Klávesnice měla pouze dvě tlačítka: 0 a 1 a kód byl čtyřmístná posloupnost těchto dvou znaků. Matěj hned přemýšlel jak se co nejefektivněji dostat dovnitř. Najděte nejkratší posloupnost znaků 0 a 1 obsahující všechny možné kódy (alespoň jednu). Nezapomeňte na zdůvodnění, proč již nemůže být kratší.

Úloha 1.6. V Hloupětíně na náměstí už zase stavěli monument. Tentokrát šlo o opravdu ambiciózní projekt. Byly zvoleny čtyři body v prostoru neležící v jedné rovině a bylo dohodnuto, že bude sestaven rovnoběžnostěn mající čtyři z osmi vrcholů v těchto bodech. Radní se však neshodli na konkrétní podobě rovnoběžnostěnu. Kolik existuje různých rovnoběžnostěnů se čtyřmi vrcholy v těchto bodech? (Rovnoběžnostěn je čtyřboký hranol s podstavou rovnoběžníku, má tedy šest stěn ve tvaru rovnoběžníku.)

Úloha 1.7. V Lenošíně na obecní tabuli bylo napsáno číslo 7^{2015} v desítkové soustavě. Obecní matematik postupně vždy smaže poslední cifru (jednotky) a ke zbytku přičte pětinásobek smazaného. Může tímto způsobem na tabuli vzniknout číslo 2015^7? Svou odpověď řádně zdůvodněte.

Bonusová úloha. Na pamětní desku k monumentu z šesté úlohy má být vyryt důkaz Pythagorovy věty. Město Hloupětín tak vypisuje konkurz na nejkrásnější z nich. Najděte alespoň tři pěkné důkazy.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ