Řešení 4. série

Alespoň

autor: *Janča*

Úloha 4.1. Liběnka měla tabulku 10×10 vyplněnou čísly 1 až 100. Když ji ale ukázala Henrymu, ten jenom poznamenal: „Ale vždyť v tomhle sloupečku máš čísla, jejichž rozdíl je obrovský!“ „To není fér,“ ohradila se Liběnka. „Ať už bych si tabulku vyplnila jakkoliv, bude v ní řádek nebo sloupeček, ve kterém je rozdíl některých dvou políček alespoň 50.“ Dokažte Liběnčino tvrzení.

Řešení. Predpokladajme, že existuje tabuľka, kde v každom riadku a v každom stĺpci je rozdiel dvoch čísel najviac 49. Nech číslo 1 je na riadku i. Potom všetky čísla na riadku i sú najviac 50 (inak by bol ich rozdiel s číslom 1 viac ako 49). Číslo 100 nech je na riadku j, $j\neq i$, potom však zaručene je v stĺpci s nejakým číslom z riadku i. Nech je to číslo x, platí $x<51$. Tým pádom $|100-x|>49$, čo je spor s predpokladom. Tým sme dokázali tvrdenie, že vždy existuje riadok alebo stĺpec, kde rozdiel minimálne jednej dvojice čísel je aspoň 50.

Úloha 4.2. Henry se oproti tomu vychloubal výrazem

$$\frac{b^3+a}{c}\cdot\frac{c^3+b}{a}\cdot\frac{a^3+c}{b}.$$

Tvrdil, že ať už do něj dosadí jakákoliv reálná čísla $a,b,c\geq 2$, vždy dostane alespoň S. Najděte největší reálné S takové, že pro libovolná $a,b,c\geq 2$ bude Henryho výraz nabývat hodnoty alespoň S.

Řešení. Pro $a=b=c=2$ je výraz roven 125. Dále ukažme, že nikdy nemůže nabývat hodnoty menší.

Za podmínek ze zadání platí $2a^2-5a+2\geq 0$, neboť 2 je největší kořen tohoto polynomu a vedoucí koeficient je kladný. Dále máme $a^3+c\geq 2a^2+2\geq 5a$. Analogicky $b^3+a\geq 5b$ a $c^3+b\geq 5c$. Tyto tři nerovnosti mají na obou stranách kladná čísla a znaménka nerovnosti stejným směrem, můžeme je tedy vynásobit a výslednou nerovnost podělit kladným číslem abc pro obdržení námi dokazované nerovnosti

$$\frac{b^3+a}{c}\cdot\frac{c^3+b}{a}\cdot\frac{a^3+c}{b}\geq 125.$$

Jiné řešení podle Karolíny Kuchyňové

Uvažujme libovolná reálná čísla $a,b,c\geq 2$. Zadaný výraz postupně upravíme:

$$\frac{b^3+a}{c}\cdot\frac{c^3+b}{a}\cdot\frac{a^3+c}{b}=\left(\frac{b^3}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{c^3}{b}+1\right)\cdot\left(\frac{a^3}{c}+1\right)=$$
$$=\left(\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}\right)+\left(\frac{b^2c^3}{a}+\frac{a^2b^3}{c}+\frac{c^2a^3}{b}\right)+(a^2b^2c^2)+1.$$

Pro prní dvě závorky z AG nerovnosti vyplývá:

$$\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}\cdot\frac{c^3}{b}\cdot\frac{a^3}{c}}=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 12,$$
$$\frac{b^2c^3}{a}+\frac{a^2b^3}{c}+\frac{c^2a^3}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2c^3}{a}\cdot\frac{a^2b^3}{c}\cdot\frac{c^2a^3}{b}}=3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}\geq 48$$

a podobně $a^2b^2c^2\geq 64$, přičemž rovnost nastává ve všech případech pro $a=b=c=2$.

Když do zadaného výrazu dosadíme minima jednotlivých závorek

$$\left(\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}\right)+\left(\frac{b^2c^3}{a}+\frac{a^2b^3}{c}+\frac{c^2a^3}{b}\right)+\left(a^2b^2c^2\right)+1\geq 12+48+64+1=125,$$

dostáváme celkové minimum výrazu, které nastane pro $a=b=c=2$. Hledaným číslem S je proto hodnota 125.

Úloha 4.3. Kouma dostal k narozeninám 128 dárků. „Podívej Ňoumo," rozzářil se Kouma. „Tenhle azurový je nejtěžší, ten broskvové barvy je druhý nejtěžší a třetí je tady ten citronově žlutý." „Nevěřím ti," zamračil se Ňouma, „beztak na to nemáš odhad." Na kolik nejméně vážení (pomocí rovnoramenných vah) dokáže Ňouma Koumovo tvrzení potvrdit, pokud může porovnat vždy jen dva dárky mezi sebou a každé dva dárky mají různou hmotnost?

Řešení. Označme azurový, broskvové barvy a citronový po řadě jako A, B, C. Pak mezi ostatními 125 dárky lze pomocí 124 vážení najít nejtěžší (BÚNO nechť je duhový a značme ho D). Jednoduše vezmeme dva libovolné, porovnáme je. Vítěze porovnáme s nějakým dalším dárkem a tohle opakujeme dokud neprojdeme všech 125 dárků a tedy uděláme 124 vážení. Pak provedeme další tři vážení: D porovnáme s C, C s B a B s A a tím tedy ověříme správnost Koumova tvrzení na 127 vážení. Ještě zbývá dokázat, že to nelze ověřit na méně vážení. To je ale zřejmé, protože každý dárek, který není nejtěžší, musí alespoň v jednom vážení být lehčím ze dvou porovnávaných, jinak o něm nebudeme vědět, že není nejtěžší. Tudíž vážení musí být alespoň tolik, kolik je dárků, které nejsou nejtěžší, a to je 127.

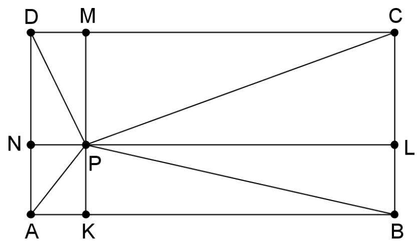
Úloha 4.4. Matěj napsal na tabuli nekonečně dlouhou posloupnost přirozených čísel tak, že začal číslem a a každé další číslo bylo o k větší než číslo předcházející (a, k jsou přirozená). Kouma si všiml, že tato aritmetická posloupnost má jedenáct po sobě jdoucích členů, z nichž každý je prvočíslo. Ukažte, že k musí být alespoň 2014.

Řešení. Podle Jana Jurky: Důkaz sporem: Předpokládejme, že jsme našli taková čísla a a $k<2014$, že $a+ik$ je pro každé $i\in\{0,1,\ldots,10\}$ prvočíslo (množinu těchto 11 různých prvočísel označme P). Nyní snadno nahlédneme (např. užitím čínské zbytkové věty), že každé z prvočísel $2,3,5,7$ musí dělit k, jinak by P obsahovala dvě čísla dělitelná tímto prvočíslem a to by byl spor. Dál pokud je k dělitelné 11, pak je určitě alespoň $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2310$, což by byl spor s předpokladem. Pak tedy 11 nedělí k a tedy P obsahuje prvek dělitelný 11 a protože jsou to všechno prvočísla, musí obsahovat přímo číslo 11. Vzhledem k tomu, že $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$ dělí k, to musí být ten nejmenší prvek P, tedy $a=11$. Nyní položme $k=210x$, kde x je prozatím neznámé přirozené číslo. Rozebráním případů $x\in\{1,2,\ldots,9\}$ zjistíme, že P v těchto případech vždy obsahuje složené číslo. Pak tedy $x\geq 10$ a tedy $k\geq 2100>2014$, což je spor s předpokladem.

Úloha 4.5. Uvnitř obdélníkového náměstí $ABCD$ v Lenošíně postavili stožár P a vedli z něj ozdobné řetězy do všech čtyř rohů náměstí. Kolemjdoucí Bubla si pak všimla, že platí $|AP|^2+|CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$. Zvládnete tuto skutečnost dokázat?

Řešení. Označme paty kolmic z bodu P na strany obdélníku dle obrázku.

Pak zřejmě $|AK| = |NP| = |DM| = a$, $|KB| = |PL| = |MC| = b$, $|AN| = |KP| = |BL| = c$, $|ND| = |PM| = |LC| = d$. Dále z Pythagorovy věty $|AP|^2 = a^2 + c^2$, $|BP|^2 = b^2 + c^2$, $|CP|^2 = b^2 + d^2$, $|DP|^2 = a^2 + d^2$. Sečtením první a třetí, resp. druhé a čtvrté z těchto rovností obdržíme výraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, a tedy jsou tyto dva výrazy rovny, což jsme chtěli dokázat.



Úloha 4.6. Matěj s Liběnkou přišli Koumovi na narozeninovou oslavu. Kolem stolu bylo celkem 30 míst uspořádaných do kruhu. „Když se teď všichni zvedneme a znovu si sedneme náhodně,“ uvítal je Henry, bude pravděpodobnost, že nenajdete dvě volná místa vedle sebe, menší než 25%. Kolik nejméně bylo u stolu volných míst?

Řešení. Podle Vojtěcha Suchánka

Nechť n je počet volných míst. Nebudeme rozlišovat jednotlivé hosty, ale budeme rozlišovat rozsazení, která jsou otočením jiných rozsazení. Také rovnou uvažujme $1 < n \leq 15$. Pokud totiž n je alespoň 16, neexistuje uspořádání, ve kterém dvě volná místa nesousedí.

Spočítáme počet rozsazení, kdy žádné dvě volná místa nejsou vedle sebe. Uvažme jedno konkrétní volné místo, které vlastně rozděluje kruh na řadu židlí. Dále zde máme $n - 1$ volných míst, která rozdělují řadu na n nenulových skupinek sousedících hostů (nenulový, aby žádné dvě volná místa nesousedily). Počty hostů v skupinkách označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Má platit

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 30 - n$$

Hledáme počet řešení této rovnice v přirozených číslech. Ten je určen výrazem $\binom{(30-n)-1}{n-1}$ (známý přepážkový princip). Původní volné místo můžeme zvolit 30 způsoby a každé rozsazení se takto započítá n-krát (jednou za každé volné místo). Proto celkový počet způsobů, jak rozesadit hosty, aby žádná dvě volná místa nesousedila, je

$$\binom{29-n}{n-1} \cdot \frac{30}{n}$$

Hledané n tedy musí splňovat

$$\frac{\binom{29-n}{n-1} \cdot \frac{30}{n}}{\binom{30}{n}} = \frac{\binom{29-n}{n-1}}{\binom{29}{n-1}} < 0,25$$

Je zřejmé, že tato pravděpodobnost bude monotonní vzhledem k n. Numericky zjistíme, že pro $n = 6$ je pravděpodobnost větší než $0,25$ a pro $n = 7$ menší. U stolu proto muselo být nejméně 7 volných míst.

Úloha 4.7. Matěj špatně spal. Zaprvé ho po oslavě ohromně bolela hlava, zadruhé přemýšlel, jak by asi vypadala funkce definovaná na kladných racionálních číslech $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, která by splňovala pro každé kladné racionální x, že $f(f(x)) = \frac{1}{x}$. Najděte alespoň jeden příklad takové funkce.

Řešení. Nechť $f(1) = K$. Pak $f(K) = f(f(1)) = 1$ a dále $K = f(1) = f(f(K)) = 1/K$. Jediné kladné racionální číslo splňující $K = 1/K$ je 1 a tedy $f(1) = 1$. Dále racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ je spočetně mnoho, uvažme tedy libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, která obsahuje každé právě jednou. Dál nechť f se řídí následujícím předpisem: $a_{2n} \to a_{2n+1} \to 1/a_{2n} \to 1/a_{2n+1} \to a_{2n}$. Tento zápis je zřejmě bezesporný a navíc vyhovuje zadání.

Pozn. o spočetnosti racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$
Množina je spočetná právě tehdy, jestliže existuje její vzájemně jednoznačné zobrazení na množinu přirozených čísel. Laicky řečeno je množina spočetná, pokud její prvky umíme očíslovat. Všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$ lze zapsat ve tvaru p/q, kde p, q jsou přirozená čísla a $p < q$. Seřaďme tedy tyto zlomky „lexikograficky“ nejprve dle q, pak podle p. Získáme posloupnost $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \ldots$. A racionálních čísel na tomto intervalu je tedy skutečně spočetně.

Pro úplnost dodejme, že i množina kladných racionálních čísel a množina všech racionálních čísel jsou spočetné množiny. Z předchozí posloupnosti bychom nové mohli vytvořit např. tak, že nejprve umístíme jedničku a pak za každé číslo vložíme jeho převrácenou hodnotu. Rozšíření na všechna racionální čísla pak snadno vytvoříme tak, že nejprve napíšeme nulu a pak píšeme předchozí posloupnost, kde každý prvek bude následován svou opačnou hodnotou.