Řešení 3. série

Kroky

autor: *Janča*

Úloha 3.1. Matěj si přivezl z Matematické konference příklad, který ovšem nikdo neuměl dokázat. Ukázal ho přátelům po nedělním obědě. „Máme libovolná celá čísla a, b, c, d, e. V každém kroku tato čísla nahradíme čísly $|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-e|, |e-a|$. Nedaří se mi ovšem dokázat, že po určitém konečném počtu kroků bude alespoň jedno z čísel 0. Pomůžete mi s důkazem?“

Řešení. Myšlenka důkazu je založená na skutečnosti, že jsou-li všechna čísla v pětici kladná, sníží se v dalším kroku maximum této pětice. Dále následuje formální zápis této myšlenky.

Podle Jana Jurky

Definujeme přesně podle zadání rekurentní posloupnost pětic $\{(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)\}_{i=0}^{\infty}$ při $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0) = (a, b, c, d, e)$ předpisem

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}, e_{n+1}) = (|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - d_n|, |d_n - e_n|, |e_n - a_n|)$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. Kvůli absolutním hodnotám je zřejmé že po prvním kroku už budou všechny pětice obsahovat výhradně nezáporná čísla.

Pro každé přirozené $n \in \mathbb{N}$ označme $g_n = max\{a_n, b_n, c_n, d_n, e_n\}$. Předpokládejme pro spor, že neexistuje přirozené číslo m takové, že alespoň jedno z čísel a_m, b_m, c_m, d_m, e_m je nulové. Pak jsou pro každé $n \in \mathbb{N}$ všechna čísla n-té pětice mezi čísly 1 a g_n.

$$1 \leq a_n, b_n, c_n, d_n, e_n \leq g_n$$

Ale rozdíl libovolných dvou takových čísel nemůže v absolutní hodnotě převýšit číslo $g_n - 1$. Proto $g_{n+1} \leq g_n - 1$. Je proto $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ klesající posloupnost přirozených čísel. To je evidentní spor. Dostáváme spor s předpokladem, proto existuje přirozené číslo m, takové, že alespoň jedno z čísel a_m, b_m, c_m, d_m, e_m je nulové.

Úloha 3.2. „Moc dobře víš, Matěji, že mi takovéto úlohy zrovna třikrát nejdou,“ mračil se Henry. „Ale když už jsem zmínil tu trojku, dám Vám taky jeden příklad. Máme posloupnost trojic $a_1 = (3, 13, 31)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $a_{n+1} = (x_n y_n, y_n z_n, x_n z_n)$, kde $a_n = (x_n, y_n, z_n)$. Tvrdím, že v žádné trojici se nevyskytuje mocnina přirozeného čísla. Komu se to podaří dokázat, za toho budu celý týden umývat nádobí.“ Umyje Henry nádobí i za Tebe?

Řešení. Vypíšeme si prvých pár členov postupnosti a všimneme si, že všetky členy sú v jednom z tvarov:

$$a_n = ((xyz)^k x, (xyz)^k y, (xyz)^k z)$$
$$a_n = ((xyz)^k / x, (xyz)^k / y, (xyz)^k / z)$$

kde x, y, z sú ľubovoľné prvočísla (konkrétne 3, 13, 31, ale nezáleží nám na poradí) a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naše tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

$$a_1 = (3, 13, 31) = ((3 \cdot 13 \cdot 31)^0 \cdot 3, (3 \cdot 13 \cdot 31)^0 \cdot 13, (3 \cdot 13 \cdot 31)^0 \cdot 31)$$
$$a_2 = (3 \cdot 13, 13 \cdot 31, 3 \cdot 31) = ((3 \cdot 13 \cdot 31)^1/31, (3 \cdot 13 \cdot 31)^1/3, (3 \cdot 13 \cdot 31)^1 \cdot 13)$$

Vypočítajme nasledujúci člen pre dané tvary:

$$a_n = ((xyz)^k x, (xyz)^k y, (xyz)^k z)$$
$$a_{n+1} = ((xyz)^{2k+1}/z, (xyz)^{2k+1}/x, (xyz)^{2k+1}/y)$$

$$a_n = ((xyz)^k/x, (xyz)^k/y, (xyz)^k/z)$$
$$a_{n+1} = ((xyz)^{2k-1}z, (xyz)^{2k-1}x, (xyz)^{2k-1}y)$$

Oba nasledujúce členy a_{n+1} sú tiež v požadovanom tvare. Z toho vyplýva, že v požadovanom tvare sú všetky členy, teda žiaden člen postupnosti nemôže byť mocninou prirodzeného čísla.

Úloha 3.3. Kouma se přihlásil do turnaje v Kamenohraní. Je to starodávná hra, hraná na šachovnici 5×5. Začíná se s 13 černými kameny a s 12 bílými, přičemž černé kameny jsou rozestavěny na černých polích a bílé na bílých. První hráč vybere černý kámen a odstraní ho z hracího plánu. Na uvolněné políčko potom posune bezprostředně sousedící bílý kámen (pohybovat se smí pouze o jedna ve svislém nebo vodorovném směru). Druhý hráč na uvolněné políčko posune černý kámen a první hráč opět na vzniklé volné pole posune kámen bílý. Ten, kdo nemůže táhnout, prohrává. Kouma se do této situace nechce dostat, ovšem nedaří se mu vymyslet výherní strategii. Pomůžeš mu zvítězit v turnaji a vymyslíš strategii za jednoho ze dvou hráčů, která vždy vyhrává, ať už druhý hráč hraje jakkoliv?

Řešení. Ukažme, že ať už bude hrát první hráč (bílý) jakkoliv, vždy dokáže druhý (černý) hráč zvítězit.

Nejprve několik základních poznatků. Vzhledem k tomu, že lze táhnout vždy pouze s figurou vedle volného pole, bude volné pole v tahu bílého hráče černé a naopak. Tedy po tahu každého hráče se právě tažená figurka nachází na poli opačné barvy. Jednoduchou úvahou tedy vidíme, že každou figurkou smí být taženo ve hře nejvýše jednou.

Černý tedy zvolí následující strategii: Poté, co bílý odstraní libovolnou figurku, uspořádá si zbylé figurky do dvojic sousedních polí – v každé dvojici tak bude černá a bílá figurka. (Snadno nahlédneme, že takové párování je možné ať už bílý odstraní kteroukoliv figurku.) Pak vždy, když bílý potáhne s nějakou figurkou, uvolní se pole v příslušné dvojici a černý může táhnout druhou figurkou z dvojice. Tímto způsobem má zajištěnou „odpověď“ na jakýkoliv tah bílého hráče a nemůže tedy prohrát. Zároveň má však hra nejvýše 24 tahů a s touto strategií tedy nutně musí skončit prohrou bílého hráče, ať už bude hrát bílý jakkoliv.

Úloha 3.4. Liběnka miluje moderní umění, podařilo se jí přemluvit Ňoumu, aby společně zašli na výstavu. I když Ňouma umění nerozumí, zaujal ho jeden z obrazů: „Liběnko, vybavuješ si obraz s bublinami vystupujícími na obzor? Něčeho jsem si na něm všimnul. Obzor byl na plátně reprezentován přímkou p, které se dotýkaly dvě bubliny, tedy vlastně kružnice, o jednotkovém poloměru. Nebyly to tak obyčejné bubliny, kromě přímky se totiž dotýkaly i jedna druhé. Můžeme si je označit jako k_0 a k_1. Po chvíli pozorování jsem si uvědomil, že každá další bublina k_n je namalována tak, že se zároveň dotýká bublin k_{n-1}, k_{n-2} i přímky p." „To zní velice zajímavě, jen si to neumím moc dobře představit," zastyděla se Liběnka. „Počkej, to není všechno, umím také spočítat vzdálenost bodů dotyku s přímkou p dvou po sobě následujících bublin, doma ti to všechno řádně ukážu." Jelikož Ňouma po náročném dni ihned usnul, nestihl Liběnce pozorování z obrazárny předvést. Zkus to za něj a spočítej vzdálenost Ňoumou popsaných bodů.

Řešení. Poloměr kružnice k_n značme r_n, délku úsečky mezi body dotyku k_n a k_{n-2} k p jako a_n a délku úsečky mezi body dotyku k_n a k_{n-1} k p jako b_n (toto je číslo, které chceme vyjádřit v závislosti na n). Nyní každé tři „po sobě jdoucí" kružnice zadávají dva pravoúhlé lichoběžníky a jeden trojúhelník (dle obrázku), v nichž umíme najít tři pravoúhlé trojúhelníky, pro které lze z Pythagorovy věty psát:

$$\begin{aligned} a_n^2 + (r_{n-2} - r_n)^2 &= (r_{n-2} + r_n)^2 \\ b_n^2 + (r_{n-1} - r_n)^2 &= (r_{n-1} + r_n)^2 \\ (a_n + b_n)^2 + (r_{n-2} - r_{n-1})^2 &= (r_{n-2} + r_{n-1})^2 \end{aligned}$$

Tyto vztahy upravíme na

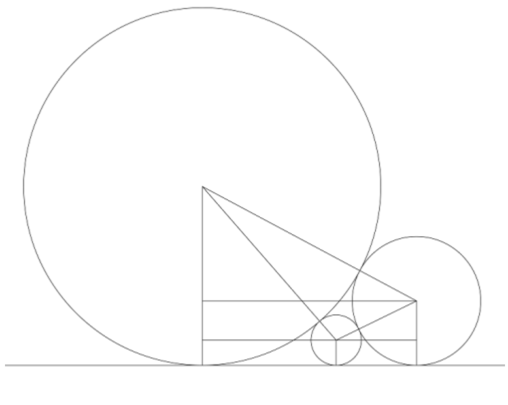
$$\begin{aligned} a_n &= 2\sqrt{r_{n-2} r_n} \\ b_n &= 2\sqrt{r_{n-1} r_n} \\ a_n + b_n &= 2\sqrt{r_{n-2} r_{n-1}} \end{aligned}$$

Dosazením prvních dvou do třetího a úpravou získáme

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}}$$

Navíc známe počáteční podmínku tohoto vztahu a tedy, že $r_0 = r_1 = 1$. Zřejmě se tedy jedná o klasickou Fibonacciho posloupnost, o které byla zmínka v pomocném textu. Snadno tedy vyjádříme, že $1/\sqrt{r_n} = F_n$, kde F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti (číslováno od nuly). Dosazením do již zmíněného vztahu pro b_n získáme konečný výsledek

$$b_n = \frac{2}{F_{n-1} F_n}$$



BRKOS Team 2015

Úloha 3.5. Liběnka objevila v knihovně antickou knihu. Náhodně ji otevřela na stránce, která popisovala Platónská tělesa. Zaujal ji pravidelný dvacetistěn. Zapamatovala si, že má dvanáct vrcholů a jeho dvacet stěn tvoří rovnostranné trojúhelníky. Při večeři ji napadl příklad, se kterým se pochlubila Matějovi. „Co kdybych na každou stěnu pravidelného dvacetistěnu napsala nezáporná celá čísla tak, aby součet čísel na všech stěnách byl 39? Myslíš, že by potom musely existovat dvě stěny se společným vrcholem, na kterých by bylo napsané stejné číslo?“ Jelikož v televizi dávali samé pro Matěje nezajímavé pořady, zjistil, že takové dvě stěny určitě existují, ještě než šel spát. Nenech se Matějem zahanbit a dokaž to také.

Řešení. Důkaz povedeme sporem. Budeme předpokládat, že stěny dvacetistěnu jdou popsat čísly tak, aby u žádného vrcholu nebyly dvě stěny se stejným číslem, a přitom byl soušet všech čísel 39. Každé číslo napsané na trojúhelníkové stěně dvacetistěnu zasahuje do tří vrcholů. Protože dvacetistěn má celkem 12 vrcholů, může být každé číslo napsané maximálně na $\frac{12}{3} = 4$ stěnách. Pokusíme se použít nejmenší možná čísla, tedy čtyřikrát 0, čtyřikrát 1, atd. Abychom popsali všechny stěny, musíme každé z čísel $0, 1, 2, 3, 4$ využít čtyřikrát. Součet těchto čísel je 40. Tím jsme sice nedokázali, že takové popsání existuje (ve skutečnosti ano, ale to u tohoto důkazu není důležité), ale rozhodně nelze vytvořit menší součet, což je spor, protože jsme chtěli dvacetistěn popsat čísly se součtem 39.

Úloha 3.6. Henry s Bublou rádi tančí, proto chodí každý pátek do nočních klubů v Hloupětíně. Za ta léta vypozorovali následující: V Hloupětíně bydlí n hlupáků a n hlupaček. Každý noční klub v Hloupětíně má mezi svými členy stejný počet hlupáků jako hlupaček. Žádné dva kluby nemají všechny členy stejné a každé dva kluby mají stejně společných členů–hlupáků jako společných členů–hlupaček. Určíš z jejich pozorování, kolik nejvýše je v Hloupětíně nočních klubů? Přilož i příklad s právě tolika kluby.

Řešení. Předpokládejme, že máme optimální řešení, tedy množinu klubů takových, že jejich počet je maximální. Dívejme se nejprve pouze na hlupáky v jednotlivých klubech. Kdyby některé dva kluby obsahovaly přesně ty samé hlupáky, tak proto, že hlupaček je v každém klubu stejně jako hlupáků, musely by tyto kluby obsahovat i stejné hlupačky. Protože však kluby mají navzájem různé členy, každý klub v optimálním řešení tedy obsahuje různou množinu hlupáků. Klubů tedy může být nejvýše 2^n (pokud počítáme prázdný klub).

Ukažme, že takové rozložení může být. Spárujme libovolně hlupačky a hlupáky a uvažme kluby, které jsou podmnožiny množiny všech párů. Těch je jistě 2^n (pokud počítáme i prázdný klub), náš odhad je tedy ostrý a snadno se ověří, že to takto definované kluby vyhovují všem podmínkám ze zadání.

Úloha 3.7. V Brkosích novinách, v sekci Matematické rébusy, se objevila zajímavá soutěžní otázka. „Dnes hrajeme o čtyři Brkosí body a spoustu Kabrňáků! Ptáme se Vás, jak dokázat pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, splňující $a + b + c = 3$, nerovnost $\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$.“

Řešení.