Řešení 2. série

Tabulky

autor: *Ted a Vláďa*

Úloha 2.1. Matěj se chlubil Liběnce svou novou interaktivní šachovnicí: „Je to klasicky obarvená šachovnice 5×5 s bílými rohy a umí v každém kroku invertovat celé řádky nebo sloupce!“ Liběnka zalapala po dechu. „To znamená, že si můžeš vybrat kterýkoliv řádek či sloupec a všechna políčka v něm přebarvit na opačnou barvu?“ zeptala se opatrně. „Přesně tak. A dokonce umím tímto způsobem celou šachovnici obarvit na černo,“ chlubil se dál Matěj. „Pff, to umí každý,“ nenechala se oklamat Liběnka. „Ale na kolik nejméně kroků to dokážeš? A kolik nejméně kroků potřebuješ, abys šachovnici obarvil na bílo?“ Najděte odpověď na Liběnčiny otázky a **řádně ji zdůvodněte**.

Řešení. Nejprve ukážeme, že na černo lze šachovnici obarvit na pět kroků a na bílo na čtyři. Například můžeme přebarvit 1., 3. a 5. sloupec a poté 2. a 4. řádek a všechna políčka jsou černá. Naopak inverzí 2. a 4. sloupce a poté 2. a 4. řádku získáme všechna políčka bílá.
Nyní uvažme políčka na diagonále. Všech pět je bílých a žádná dvě nejsou v jednom řádku ani sloupci. Na obarvení na černo tedy zřejmě potřebujeme nejméně pět kroků. Podobně pro přebarvení čtyř políček bezprostředně nad diagonálou potřebujeme určitě alespoň čtyři kroky. Naše řešení je tedy zároveň optimální a ukázali jsme, že lépe to určitě nejde.

Úloha 2.2. Henry vstoupil do místnosti, odhodil několik popsaných papírů na stůl a zabouchl za sebou dveře se slovy „Dobrou noc!“ Matějovi s Liběnkou to nedalo a začali zkoumat Henryho papíry. Bylo na nich mnoho tabulek o rozměrech 4×7, jejichž políčka byla obarvena červeně nebo modře. „To je zajímavé,“ začala Liběnka, „ve všech tabulkách existují alespoň dva obdélníky s vrcholy ve středech políček jedné barvy.“ „A myslíš, že to platí vždy?“ zeptal se Matěj. Rozhodněte, zda pro každou tabulku 4×7, jejíž políčka jsou obarvena dvěma barvami, **existují dva obdélníky** s vrcholy ve středech políček jedné barvy. Čtverec také považujeme za obdélník.

Řešení. Podle Davida Chlupa: (Tabulka má 4 řádky a 7 sloupců.) Uvažme nejprve pouze první tři řádky. V každém sloupci některá barva převažuje. Nejméně ve čtyřech sloupcích tedy převažuje tatáž barva. Dvojice řádků jsou ale pouze tři a tedy se některá dvojice políček stejné barvy opakuje. Ta zřejmě tvoří jeden hledaný obdélník. Stejnou úvahu nyní použijeme na jinou trojici řádků, z nichž ovšem jen jeden bude ten, který obsahoval políčka prvního obdélníku. Opět dostáváme hledaný obdélník, ale zřejmě různý od prvního. Dohromady tedy máme dva obdélníky s požadovanou vlastností a s důkazem jsme hotovi.

Úloha 2.3. Henry té noci nemohl usnout. Neustále totiž přemýšlel, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje tabulka $n \times n$ obsahující n^2 přirozených čísel, pro kterou platí, že v políčku v i-tém řádku a j-tém sloupci je počet všech čísel j, která se vyskytují v i-tém sloupci. (Např. je-li ve třetím řádku a druhém sloupci zapsána čtyřka, znamená to, že ve třetím sloupci tabulky se vyskytují celkem čtyři dvojky.) Najděte všechna taková n.

Řešení. Ukážeme, že požadovaná tabulka existuje jen pro $n = 1$.

Především pro $n = 1$ máme tabulku s jediným políčkem obsahujícím jedničku. Tato tabulka zřejmě vyhovuje zadání.

Buď nyní $n \in \mathbb{N}$ takové, že existuje tabulka M s rozměry $n \times n$ splňující zadání. Součet čísel v i-tém řádku M vyjadřuje, kolikrát se čísla $1, \dots, n$ vyskytují v i-tém sloupci. Zřejmě tento součet může být nanejvýš n. Zároveň však součet musí být aspoň n, protože tabulka obsahuje jenom přirozená čísla. Součet čísel v libovolném řádku tabulky je tedy roven n. Z toho vyplývá, že v každém políčku tabulky M musí být číslo 1. Takováto tabulka ovšem vyhovuje zadání pouze pro $n = 1$.

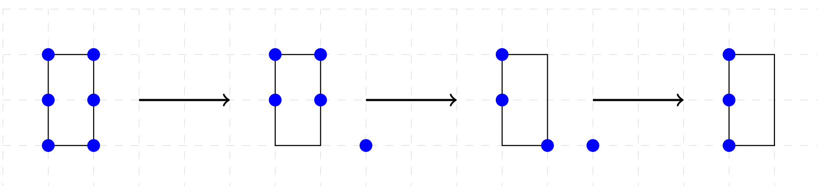
Úloha 2.4. Ňouma sledoval kouzelnický šachový turnaj. Byla to docela řežba, přesně jak to měl v kouzelnických šachách rád – hrálo se totiž na nekonečné šachovnici. Na začátku bylo na šachovnici postaveno n^2 živých figurek rozestavených do políček ve tvaru čtverce o straně n políček tak, že v každém políčku stála právě jedna figurka. V každém tahu jedna z figurek vertikálně či horizontálně přeskočila sousední políčko obsazené jinou figurkou, postavila se na prázdné pole přímo za toto políčko, bez milosti rozsekala přeskočenou figurku a nechala zbytky vítězoslavně odklidit z hracího pole. Ňoumu tentokrát napadlo, že by mohl najít všechna přirozená čísla n, pro která může tato hra skončit s jedinou vítěznou figurkou na šachovnici.

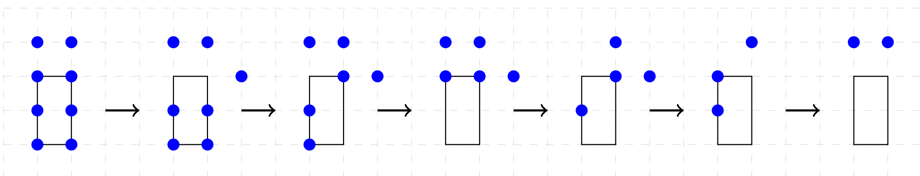
Řešení. Podle Jana Jurky: Nejprve ukažme, že pokud je n dělitelné třemi, nelze skončit pouze s jedinou figurkou. Šachovnici si přebarvíme tak, že některou diagonálu obarvíme například modře, diagonálu nad ní červeně, další nad ní zeleně a pak opět modře, červeně, zeleně. Nyní se podívejme, co se stane při jednom tahu. Bez újmy na obecnosti řekněme, že modrá figurka přeskočí červenou. Pak se stane zelenou. To znamená, že v každém tahu se počet figurek na políčkách dvou barev sníží o 1 a počet figurek zbývající barvy se o jedna zvýší. Součet počtu figurek na políčkách dvou různých barev se tedy v každém tahu změní o dva nebo zůstane stejný. Jeho parita se tedy v průběhu celé partie zachovává.

Jestliže máme na začátku $3k \times 3k$ obsazených políček, snadno nahlédneme, že od každé barvy bude stejný počet figurek (např. si všimneme, že v každém řádku tomu tak je). Součet libovolných dvou barev je tedy sudý a protože se v průběhu hry nemění jeho parita, nemůžeme skončit pouze s jedinou figurkou.

Dále ukažme, že pokud 3 nedělí n a $n \geq 5$, lze hrát tak, že zbude jediná figurka. Dokažme, že lze beze zbytku odstranit část čtverce tak, aby nám zbyl pouze čtverec 2×2 nebo 4×4.

Pomocí níže uvedených sekvencí se lze zbavit trojic sousedních figurek, aniž bychom změnili něco jiného.





Uvědomme si dále, že každý čtverec $n \times n$, kde $3 \nmid n$ lze rozdělit na čtyři části: čtverec $3k \times 3k$, dva obdélníky $3k \times i$ a čtvereček $i \times i$, kde i je buď 2 nebo 4. Užitím zmíněných sekvencí se umíme snadno zbavit všech těchto částí krom malého čtverečku.

Nakonec se inspirujeme vysokoškolskými skripty a důkaz pro $n = 2$ a $n = 4$ ponecháme na čtenáři jako cvičení.

Úloha 2.5. V Hloupětíně se na náměstí konaly trhy. Jeden z prodavačů prodával dvojice přirozených čísel, jejichž součet byl 2014, ale při jejichž sčítání v desítkové soustavě nedocházelo k žádnému přenosu. Určete počet všech dvojic, které mohl prodavač nabízet.

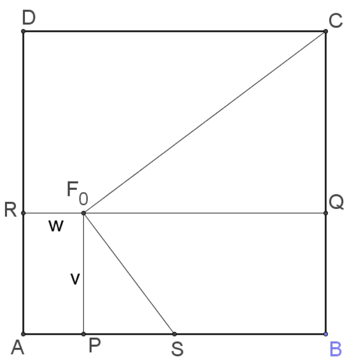
Řešení. Žádný přenos znamená, že se jednotlivé řády navzájem neovlivňují. Pro dvojici čísel (a, b), kde $\overline{a_3a_2a_1a_0} + \overline{b_3b_2b_1b_0} = 2014$, proto platí

$$\begin{aligned} a_3 + b_3 &= 2 \\ a_2 + b_2 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 1 \\ a_0 + b_0 &= 4. \end{aligned}$$

Z toho pro cifry čísla a jasně vyplývá $a_3 \in \{0, 1, 2\}$, $a_2 \in \{0\}$, $a_1 \in \{0, 1\}$, $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Podle pravidla součinu vypočítáme počet možných čísel a: $3 * 1 * 2 * 5 = 30$. Každému a umíme jednoznačně přiřadit číslo b. Dvojici (a, b) považujeme za stejnou jako dvojici (b, a), takže počet různých dvojic je jenom $\frac{30}{2} = 15$. Všimněme si, že nejmenší číslo a, které umíme vytvořit, je 0 a to nepovažujeme za přirozené číslo. Proto musíme tuto možnost odečíst, to nám dá konečný výsledek 14 dvojic.

Úloha 2.6. Liběnka s Matějem navštívili hloupětínskou galerii. Zrovna se totiž konala výstava moderního umění. Když procházeli galerií, jeden z obrazů Liběnku velice zaujal. Čtvercový obraz $ABCD$ měl nad spodní hranou vyobrazen půlkružnici. Obraz rovněž přetínala přímka z vrchního levého rohu D do spodního pravého rohu B. Když přišel k obrazu i Matěj, řekl Liběnce: „Kdybys k této půlkružnici vedla z bodu C tečnu, která nebude splývat s rámem obrazu, označila její bod doteku jako F a navíc označila průsečík přímky BD s polokružnicí jako E, jaký by byl obsah trojúhelníku BEF?“

Řešení. Úlohu budeme řešit BÚNO pro $|AB| = 10$. Zaveďme souřadný systém a čtverec umístěme tak, že $A = [0, 0]$ a $B = [10, 0]$. Označme $S = [0, 5]$ střed strany AB a dále $F_0 = [2, 4]$. Ještě označíme P, Q, R kolmé průměty bodu F do stran čtverce, tedy $P = [2, 0]$, $Q = [10, 4]$ a $R = [0, 4]$.



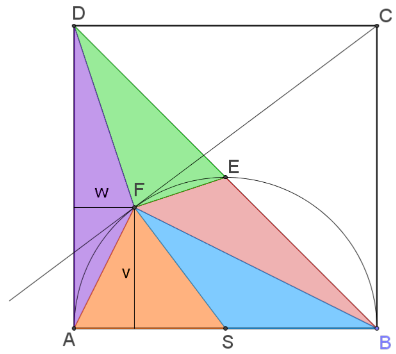
Z Pythagorovy věty v trojúhelníku PSF_0 plyne

$$SF_0 = \sqrt{|PS|^2 + |PF_0|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Z Pythagorovy věty v trojúhelníku QCF_0 plyne

$$CF_0 = \sqrt{|QC|^2 + |QF_0|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Proto $|CF_0| = 10 = |BC|$ a $|SF_0| = 5 = |SB|$. To ale pro $B \neq F_0$ znamená, že $F_0 = F$. Užitím dvou Pythagorových vět jsme dokázali, že $F = [2, 4]$.



Zřejmě je obsah trojúhelníků ASF a SBF stejný, vždyť mají stejnou výšku v a $|AS| = |SB|$. Snadno určíme, že $S(ASF) = S(SBF) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.
Rovněž $S(AFD) = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10$. Protože je $S(ABD) = \frac{10^2}{2} = 50$, je obsah

$$S(BDF) = S(ABD) - S(AFD) - S(ASF) - S(SBF) = 50 - 10 - 10 - 10 = 20.$$

Protože je bod E střed strany BD, je hledaný obsah $S(BEF) = \frac{1}{2} S(BDF) = \frac{20}{2} = 10$.

Úloha 2.7. Kouma přišel za Ňoumou s prosbou o pomoc. „Sedím nad tím už dva dny a ne a ne to rozlousknout!“ zabědoval Kouma. „Ukaž, půjč mi to,“ vytrhl Ňouma papír Koumovi z ruky. „Hele, už to skoro mám!“ zakřičel euforicky. Budete rychlejší než Ňouma a zjistíte všechna reálná řešení systému následujících nerovnic?

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0
\end{aligned}$$

Řešení. Sečteme-li všechny nerovnice, získáme po úpravě

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} \left((x_i x_{i+1} - x_i x_{i+3})^2 + (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_{i+3})^2 \right) \leq 0$$

(zde uvažujeme pro každé i, že $x_i = x_{i+5}$). Protože součet druhých mocnin reálných čísel je nekladný právě tehdy, když jsou všechna tato reálná čísla nulová, platí zřejmě, že součin libovolných dvou neznámých je roven témuž číslu. Z toho jednoduchou úvahou získáme dva typy řešení: Buď $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \in \mathbb{R}$ a nebo jsou libovolné čtyři neznámé nulové a zbylá nabývá libovolné reálné hodnoty.