Řešení 1. série

# Úvodní guláš

autor: *Kolektiv orgů*

**Úloha 1.1.** Bubla, Liběnka, Henry a Matěj hráli hru. Protože byli čtyři, napsali si na tabuli čtyři čtyřky a jejich úkolem pak bylo vepsat mezi ně tři znaménka některých ze čtyř základních operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení, znaménka se mohla i opakovat) a závorky. Jejich cílem bylo postupně tímto způsobem vytvořit všechna celá čísla od 0 až po 9 včetně. Zvládnete to také?

**Řešení.** Jelikož nám Silvia Pechová poslala velice hezky zpracovanou tabulku všech možných variant řešení,využíváme ji, jako vzorové řešení:

**0:** $4+4-4-4$, $4-4+4-4$, $4-4-4+4$, $4-4\cdot 4:4$, $4-4:4\cdot 4$, $4\cdot 4-4\cdot 4$, $4\cdot 4:\cdot 4-4$, $4:4-4:4$, $4:4\cdot 4-4$, $(4-4)\cdot 4\cdot 4$, $(4-4)\cdot 4:4$, $(4-4):4\cdot 4$, $(4-4):4:4$, $4\cdot(4-4):4$, $4\cdot(4-4)\cdot 4$, $4\cdot 4\cdot(4-4$, $4:4\cdot(4-4)$, $(4+4)\cdot(4-4)$, $(4-4)\cdot(4+4)$

**1:** $4+4:4-4$, $4-4+4:4$, $4\cdot 4:4:4$, $4:4+4-4$, $4:4-4+4$, $4:4\cdot 4:4$, $(4+4-4):4$, $(4-4+4):4$, $4:(4+4-4)$, $4:(4-4+4)$, $(4+4):(4+4)$

**2:** $4:4+4:4$, $4-(4+4):4$, $4:(4+4)\cdot 4$, $4\cdot 4:(4+4)$

**3:** $(4+4+4):4$, $(4\cdot 4-4):4$

**4:** $4+(4-4)\cdot 4$, $4+(4-4):4$, $4-(4-4)\cdot 4$, $4-(4-4):4$, $(4-4)\cdot 4+4$, $(4-4):4+4$, $4\cdot(4-4)+4$, $4-4\cdot(4-4)$, $4+4\cdot(4-4)$

**5:** $(4+4\cdot 4):4$, $(4\cdot 4+4):4$

**6:** $4+(4+4):4$, $(4+4):4+4$

**7:** $4+4-4:4$, $4-4:4+4$

**8:** $4+4+4-4$, $4+4-4+4$, $4+4\cdot 4:4$, $4+4:4\cdot 4$, $4-4+4+4$, $4\cdot 4-4-4$, $4\cdot 4:4+4$, $4:4\cdot 4+4$, $(4+4)\cdot 4:4$, $(4+4):4\cdot 4$, $4\cdot(4+4):4$, $4:4\cdot(4+4)$

**9:** $4+4+4:4$, $4+4:4+4$, $4:4+4+4$

**Úloha 1.2.** Matěj s Liběnkou si hráli s míčem. I tu jim míč znenadání spadl do trávy. Liběnka pozorně obešla míč dokola a všimla si, že na míči sedí 5 slunéček sedmitečných. Když to řekla Matějovi, hned jí odpověděl: „A víš, že můžeš natočit míč tak, že když se na něj podíváš přímo shora, tak, abys viděla právě jednu polosféru včetně její hranice, uvidíš alespoň 4 slunéčka?“ Přesvědčte o tom Liběnku.

**Řešení.**

**Rychlé řešení:** Uvažme libovolnou dvojicí bodů ze zadaných pěti. Tyto dva body pak zřejmě leží na nějaké hlavní kružnici. Tato kružnice rozdělí sféru na dvě polosféry (označme je $A$ a $B$). Zbylé tři body mohou každý být buď v $A$ nebo v $B$ nebo v $A$ i $B$ (pokud leží přímo na oné hlavní kružnici. Každopádně v $A$ nebo v $B$ leží dva ze zbylých tří bodů a tedy dohromady čtyři z pěti.

**Jiný přístup:** Trochu podobně se na problém dá nahlížet následovně. Máme sféru a bod. Tento bod zřejmě leží na nějaké polosféře. Přidáme další bod, tyto dva body leží na nějaké hlavní kružnice (jako v předchozím řešení). Přidáme další bod, ať padne tam či tam, budeme mít polosféru s třemi body. Přidáme čtvrtý – ejhle, ten může spadnout do druhé polosféry, než předchozí. Přidáme pátý – ten už určitě bude na polosféře, na které mám alespoň tři body. Opět jsme skončili se čtyřmi body na polosféře.

**Zajímavé řešení Matouše Trnky:** Chceme ukázat, že pro libovolných pět bodů na sféře existuje polosféra, na které leží alespoň čtyři z těch pěti bodů. (Polosféru budeme vždy uvažovat i s její hranicí). Na úvod poznamenejme: jestliže množina bodů na sféře leží v jedné rovině, pak tato množina bodů leží i na nějaké polosféře. Dále budeme potřebovat toto tvrzení:

*Nechť* $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *je taková množina bodů, že žádná čtveřice z nich neleží v jedné rovině. Potom existuje rovina, která prochází třemi z těchto bodů tak, že zbývající dva body leží v různých poloprostorech určených touto rovinou.*

Abychom ověřili, že to skutečně platí uvažujme přímku určenou body $x_1$ a $x_2$ (ty jsou určitě různé). Body $x_3$, $x_4$ a $x_5$ potom určují spolu s touto přímkou tři různé poloroviny. Protože ze tří úhlů mezi „sousedními" polorovinami musí aspoň dva být menší než přímý úhel, polorovina příslušející těmto dvěma úhlům určuje hledanou rovinu.

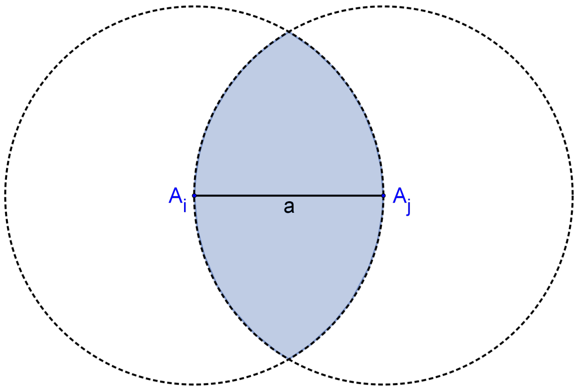
Řešení nyní plyne přímo z předcházejícího tvrzení. Jestliže totiž z uvažované pětice bodů můžeme vybrat čtveřici, která leží v jedné rovině, pak tato čtveřice leží i na nějaké polosféře. Pokud taková čtveřice neexistuje, tak vybereme nějakou trojici bodů, která určuje takovou rovinu, že zbývající dva body náleží do různých poloprostorů daných touto hraniční rovinou. Potom každá polosféra obsahující tyto tři body zároveň obsahuje aspoň jeden ze zbývajících bodů.

**Úloha 1.3.** Liběnka s sebou nosí svazek s $n$ klíči na jednom kroužku. Aby poznala, který klíč je který, rozhodla se, že si každý z $n$ klíčů obarví nějakou barvou. Pro každé přirozené číslo $n$ rozhodněte, kolik nejméně barev musí Liběnka použít, aby každý klíč podle barev rozeznala, ať už se klíče v kapse otočí nebo překlopí jakkoli.

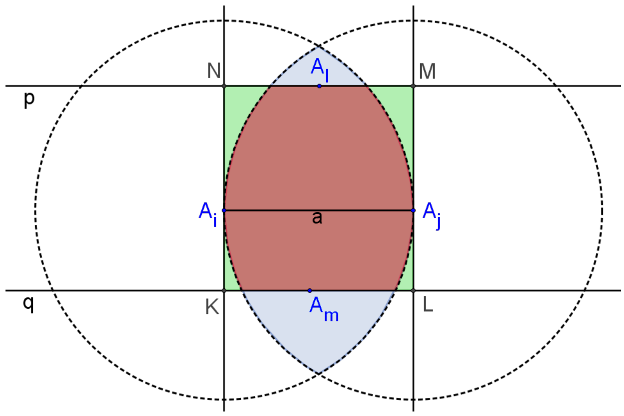
**Řešení. Podle Davida Surmy:** Pro jeden klíč nám zřejmě stačí jedna barva, naopak pro dva klíče nám zřejmě jedna barva nestačí. Dvě už ale ano. Dál uvažujme $n > 2$.
Umístíme si $n$ klíčů do vrcholů pravidelného $n$-úhelníku. Ten má celkem $n$ různých os symetrie (pro liché $n$ jde každá osa jedním vrcholem a jednou stranou, pro sudé $n$ jde každá osa buď dvěma vrcholy nebo dvěma stranami). Snadno ověříme, že pro každou dvojici (ne nutně různých) vrcholů, existuje právě jedna osa symetrie pravidelného $n$-úhelníku, která tyto dva vrcholy mezi sebou vymění.
Z této vlastnosti plyne, že pokud Liběnka obarví klíče dvěma barvami, musí nutně obě barvy použít na alespoň tři klíče. Kdyby totiž například modrou použila nejvýše na dva klíče, existovala by osa symetrie, která dva modré klíče prohodí, ostatní (například červené) nějak promíchá mezi sebou a dostali bychom situaci k nerozeznání od původní, přesto však odlišnou.
Zřejmě tedy pro $2 < n < 6$ potřebujeme alespoň tři barvy, neboť pro dvě barvy je jedna z nich použita nejvýše dvakrát. Snadno se přesvědčíme, že tři barvy nám již stačí: pro $n = 3$ obarvíme $-ABC-$, pro $n = 4$ obarvíme $-ABCC-$, pro $n = 5$ obarvíme $-ABCCC-$.
Dále pro $n \geq 6$ ukážeme, že nám stačí pouhé dvě barvy. Skutečně, obarvíme-li klíče $-ABAABB\ldots B-$ a budeme pokračovat barvou $B$, dokáže Liběnka vždy jednoznačně identifikovat každý klíč na kroužku, ať už se jí v kapse zamíchá jakkoliv.

**Úloha 1.4.** Ňouma zjistil, že má na kalhotech díru ve tvaru konvexního $n$-úhelníka. Díra má plošný obsah $10cm^2$ Chce si na ni pořídit obdélníkovou záplatu. Ukažte, že ať jsou rozměry díry jakékoli, vždy existuje obdélníková záplatu, která ji celou překryje a přitom nebude její plošný obsah větší než $20cm^2$. Přesahy záplaty zanedbejte. (Konvexní útvar s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku, která je spojuje.)

**Řešení.** Tvrzení dokážeme konstruktivně, tj. pro libovolný konvexní $n$-úhelník $A_1 \ldots A_n$ o obsahu 10 nalezneme obdélník o obsahu 20, který jej obsahuje. Ze všech vrcholů $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ vyberme některé dva, jejichž vzdálenost je maximální a označme je $A_i, A_j$ a jejich vzdálenost $|A_iA_j| := a$. (Taková dvojice vždy existuje, poněvadž $n$-úhelník je kompaktní množina bodů.)
Uvažme kruhy $K_i, K_j$ se středy pořadě $A_i, A_j$ a poloměry $a$. Pro spor předpokládejme, že existuje bod $X$ $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, který leží vně průniku těchto kruhů - bez újmy na obecnosti vně kruhu $K_i$. Potom je však $|XA_i| > a$, což je poloměr kruhu $K_i$. Našli jsme tedy dvojici bodů $X, A_i$, $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ jejichž vzdálenost převyšuje $a$. To je spor s tím, že $a$ je nejdelší úsečka $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$. Proto je $n$-úhelník $A_1 \ldots A_n$ pod průnikem kruhů $K_i, K_j$.




Označme $A_l$ libovolný bod $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, který má od přímky $A_iA_j$ maximální vzdálenost. Označme $A_m$ libovolný bod $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, který leží v polorovině opačné k $A_iA_j \rightarrow A_l$ a ze všech bodů $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ ležících v této polorovině má od přímky $A_iA_j$ maximální vzdálenost. Nechť $p, q$ jsou přímky rovnoběžné s přímkou $A_iA_j$ procházející pořadě body $A_l, A_m$. Uvažme kolmice na $A_iA_j$ vedené body $A_i, A_j$. Tato čtveřice přímek vymezuje obdélník $KLMN$ :




Předpokládejme, že existuje bod $Y$ $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ ležící mimo pás $\mathbb{P}$ ohraničený přímkami $p, q$. To je však ve sporu s naší volbou bodů $A_l, A_m$, protože to jsou body $n$-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, které mají od přímky $A_iA_j$ maximální vzdálenost (každý na jinou stranu). Proto je $n$-úhelník $A_1 \ldots A_n$ celý v pásu $\mathbb{P}$ a protože zároveň nepřesahuje průnik kruhů $K_i, K_j$, leží $n$-úhelník $A_1 \ldots A_n$ v $K_i \cap K_j \cap \mathbb{P}$.

*BRKOS Team 2014*

Protože je $n$-úhelník $A_1 \dots A_n$ konvexní, obsahuje s body $A_i, A_m, A_j, A_l$ i všechny úsečky je spojující a tudíž i čtyřúhelník $A_iA_mA_jA_l$. Jeho obsah 10 tak není menší než obsah $S$ čtyřúhelníku $A_iA_mA_jA_l$. Obsah $S$ je součtem obsahů trojúhelníků $A_iA_jA_l$ a $A_iA_jAm$. Tento souèet je zřejmě polovina obsahu čtyřúhelníku $KLMN$, tedy $KLMN$ má obsah $2S$. Protože $n$-úhelník $A_1 \dots A_n$ má obsah $10 \geq S$, je obsah $KLMN \leq 20$. Nalezli jsme tedy obdélník $KLMN$, který má obsah nejvýše 20 a překrývá celý $n$-úhelník $A_1 \dots A_n$. Tím je důkaz hotov.

**Úloha 1.5.** Když Matěj ukazoval Henrymu svoji oblíbenou sbírku příkladů, poznamenal:

1. „Každý můj oblíbený příklad je zajímavý.“
2. „Všechny příklady s hvězdičkou jsou ve škole neoblíbené.“
3. „Každý složitý příklad je můj oblíbený.“
4. „Zajímavý příklad je vždy nezvyklý.“
5. „Všechny příklady s hvězdičkou jsou složité.“

Henry se chvilku zamyslel a odvodil z předchozích vět dvě další věci:

a) Každý ve škole neoblíbený příklad je zajímavý.

b) Všechny příklady s hvězdičkou jsou nezvyklé.

Rozhodněte, které z Henryho závěrů nutně vyplývají ze zadaných informací.

**Řešení.** Poznámka na úvod: Implikace je tvrzení typu „Když $A$, potom $B$.“. Je tedy pravdivé vždy, kromě případu, kdy $A$ je pravdivé a $B$ nepravdivé.
Výroky přepíšeme do implikací:

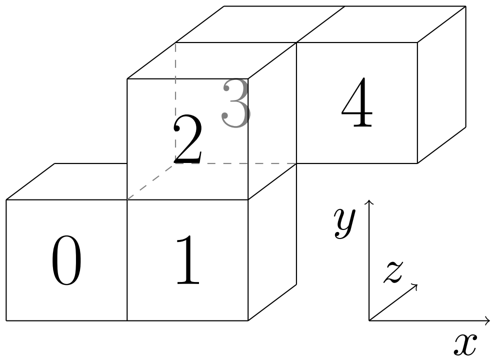
1. Matějův oblíbený $\Rightarrow$ zajímavý
2. s hvězdičkou $\Rightarrow$ neoblíbené ve škole
3. složitý $\Rightarrow$ Matějův oblíbený
4. zajímavý $\Rightarrow$ nezvyklý
5. s hvězdičkou $\Rightarrow$ složitý

Tvrzení a) zní: Každý ve škole neoblíbený příklad je zajímavý.
Když je příklad neoblíbený ve škole, nevíme o něm už nic dalšího, protože z něho ze zadaných výroků nevede žádná implikace. Je pouze „na pravé straně šipky“ a protože implikace je jen jednosměrný vztah, o neoblíbených příkladech nic neříká. Tento výrok tedy z Matějových výroků nevyplývá.

Tvrzení b) zní: Všechny příklady s hvězdičkou jsou nezvyklé.
Můžeme sestavit posloupnost implikací: s hvězdičkou $\Rightarrow$ složitý $\Rightarrow$ Matějův oblíbený $\Rightarrow$ zajímavý $\Rightarrow$ nezvyklý. Dané tvrzení platí kvůli tranzitivní vlastnosti implikace, která říká, že pokud platí $A \Rightarrow B$ a zároveň $B \Rightarrow C$, pak platí i $A \Rightarrow C$. Tento výrok tedy platí.

**Úloha 1.6.** Ňouma měl jednou megalomanský sen. Zdálo se mu, že kostičkami, jako je ta na obrázku, vyplnil celý prostor tak, aby žádné místo v prostoru nezůstalo prázdné, ale přitom se kostičky vzájemně nepřekrývaly. Najděte způsob, jakým to mohl Ňouma udělat.

**Řešení.** Rozdělme trojrozměrný prostor na krychle jednotkové délky hran se středy v bodech s celočíselnými souřadnicemi. Každé krychli přiřadíme hodnotu rovnu zbytku po dělení pěti ze součtu souřadnic jejího středu. Krychle spojíme do pětic, jak je naznačeno na obrázku. Každá krychle bude v právě jedné pětici. Pětice tedy vyplňují prostor (dokonce periodicky a všechny při shodném natočení). Všimneme si, že pětice můžeme nahradit za kostky, které tím pádem také vyplňují prostor.




**Úloha 1.7.** Kouma si hrál se čtyřmi přirozenými čísly $a, b, c, d$. Přišel k němu Ňouma a všiml si, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} ab + a + b &= 524, \\ bc + b + c &= 146, \\ cd + c + d &= 104, \\ abcd &= 8!, \end{aligned}$$

kde $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Najděte všechny čtveřice čísel, s nimiž si Kouma mohl hrát.

**Řešení.** Použitím rozkladu $xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$ dostáváme
$(a+1)(b+1) = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $(b+1)(c+1) = 147 = 3 \cdot 7^2$, $(c+1)(d+1) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
Odtud jasně vidíme, že $(b+1)|21$ a $(c+1)|21$. Zároveň $7|(b+1)$ a také $7|(c+1)$. Tedy nám stačí rozlišit dvě možnosti, a to

i $b + 1 = 7$, $c + 1 = 21$, tedy $b = 6$, $c = 20$. Dopočítáním $a$ z první rovnice dostáváme $a + 1 = 75$ a tedy $a = 74$, avšak potom $a \nmid 8!$ a tato čísla nemohou vyhovovat čtvrté rovnici.

ii $b+1 = 21$, $c+1 = 7$, tedy $b = 6$, $c = 20$. Dopočítáním $a$, $d$ z první, resp. třetí rovnice získáme $a + 1 = 25$, $d + 1 = 15$ a dostáváme čtveřici $(24, 20, 6, 14)$.

Dosazením do čtvrté rovnice snadno ověříme, že naše čtveřice je opravdu řešením všech čtyř rovnic, a tudíž jediná čtveřice čísel, se kterou si mohl Kouma hrát, je čtveřice $(24, 20, 6, 14)$.