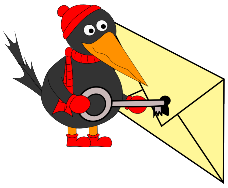
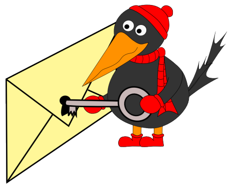


Řešení 6. série

Nekonečná série

autor: *Baci a Shymo*



Úloha 6.1. Každé přirozené číslo je obarveno jednou ze čtyř barev tak, že žádná dvě sousední čísla nemají stejnou barvu. Matěj má za úkol vybrat si jednu z těchto barev a nekonečně mnoho čísel přebarvit touto jednou barvou (tj. změnit jejich barvu na Matějem vybranou) tak, aby opět žádná dvě sousední neměla stejnou barvu. Je to možné pro každé obarvení?

Řešení. Ano, je to možné. Každá trojice po sobě jdoucích čísel je obarvena jedním z 64 způsobů (možností, jak obarvit trojici čísel čtyřmi barvami je $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Trojic po sobě jdoucích přirozených čísel je však nekonečně mnoho, tedy některý ze způsobů se vyskytuje nekonečně mnohokrát (kdyby se každý vyskytoval pouze konečně mnohokrát, bylo by trojic konečně mnoho). Jestliže si Matěj vybere barvu, která v tomto způsobu nefiguruje, může prostřední číslo z každé takto obarvené trojice bez problémů přebarvit a zcela jistě po přebarvení opět žádná dvě sousední čísla nebudou mít stejnou barvu. Tím je úloha vyřešena.

Úloha 6.2. Bubla si napsala posloupnost $a_k = \frac{(k+1)^2(k^2+\frac{1}{k})}{(k+2)(k^3-1)} (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ a pak začala členy této posloupnosti násobit. Nejprve první s druhým, pak to vynásobila třetím, čtvrtým atd. K jakému číslu se Bubla dostane, vydrží-li násobit až do nekonečna?

Řešení. Určíme člen b_n Bubliny postupnosti pro $n \geq 2$ vzniknuté násobením a_k:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \prod_{k=2}^{n} a_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)^2(k^2+\frac{1}{k})}{(k+2)(k^3-1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)^2(k^3+1)}{(k+2)k(k^3-1)} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left[\frac{k+1}{(k+1)+1}\right]\left[\frac{k+1}{k}\right] \frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)} \\
&= \left[\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{(k+1)+1}\right]\left[\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right]\left[\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}\right]\left[\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2+(k-1)+1}{k^2+k+1}\right] \\
&= \left[\frac{3}{n+2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\right]\left[\frac{3}{n^2+n+1}\right] = \frac{9}{4}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

Nakonec nám zbývá určit limitu postupnosti b_n pro $n \to \infty$ t.j.

$$
b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{4}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{9}{4}.
$$

Jestliže Bubla vydrží násobit členy posloupnosti do nekonečna, dostane se k číslu $\frac{9}{4}$.

Úloha 6.3. Matěj Buble její posloupnost záviděl, a tak si hned začal psát jednu vlastní na svou tabuli. Nejprve napsal na tabuli číslo jedna. Za něj dvojku, pak trojku, a pak vždy součin všech doposud napsaných čísel zvětšený o jedničku. Liběnka to sledovala a průběžně sčítala převrácené hodnoty Matějových čísel. Najděte nejmenší číslo, které Liběnčin součet nemohl nikdy překročit. (Převrácená hodnota čísla x je číslo $\frac{1}{x}$.)

Řešení. Matějovu posloupnost a_n je možné zapsat rekurentně jako

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1 = (a_{n-1} - 1)a_{n-1} + 1 & n > 1. \end{cases}$$

Dále budeme uvažovat posloupnost $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n}$. Nejmenší číslo s, které Liběnčin součet nemohl překročit, je $s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ za předpokladu konvergence nekonečného řádu. Z definice řádu a_n pro $n > 1$ využijeme, že $\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{(a_{n-1}-1)a_{n-1}}$. Rozkladem na parciální zlomky dostáváme

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Tedy s_k pro $k > 1$ můžeme upravit na

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{a_n} = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1} \right) = 1 + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} = 2 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} \end{aligned}$$

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} 2 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} = 2 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_{k+1} - 1} = 2.$$

V poslední úpravě jsme využili faktu, že $a_{k+1} - 1 = (a_k - 1)a_k > a_k - 1$ t.j. posloupnost $b_k = a_k - 1$ je rostoucí, tudíž $\frac{1}{b_k}$ je klesající a z definice limity platí $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{b_k} = 0$.

Úloha 6.4. Henry je však všechny překonal, když si začal psát obecnou posloupnost danou vztahem $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 4}{a_n + a_{n-1} + 2}$ s jedinou podmínkou: Její členy musí být kladné. Po chvilce se členy posloupnosti začaly blížit jedné konkrétní hodnotě. Vaším úkolem je tuto hodnotu určit (tedy určit limitu této posloupnosti).

Řešení. Předpokládejme tedy, že limita existuje. Pak existuje $L \in \mathbb{R}$ (limita posloupnosti) takové, že

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= L + \epsilon_{n+1}, \\ a_n &= L + \epsilon_n, \\ a_{n-1} &= L + \epsilon_{n-1} \end{aligned}$$

pro nějaká $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}$ blížící se s rostoucím n k nule. Dosazením do vzorce dostáváme

$$L + \varepsilon_{n+1} = \frac{(L + \varepsilon_n)^2 + (L + \varepsilon_n)^2 + 4}{2L + \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + 2}.$$

Úpravou a vyjádřením L dostaneme

$$L = \frac{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2 - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n-1} - 2\varepsilon_{n+1} + 4}{2\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + 2}.$$

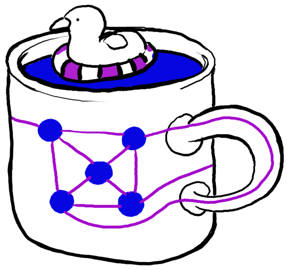
Pro $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1} \to 0$ je daný výraz potom

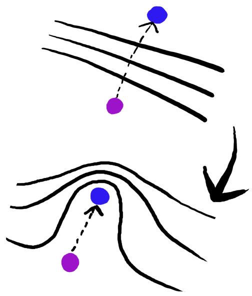
$$L = \frac{4}{2} = 2.$$

Daná posloupnost má tedy limitu rovnu dvěma.

Úloha 6.5. Ňoumův snídaňový hrníček na kakao měl jedno ucho a na sobě namalovaných pět červených teček. Zatímco Ňouma poklidně snídal, Kouma přemítal, jestli je možné každou tečku spojit s každou jinou po povrchu hrníčku tak, aby se spojnice na hrníčku neprotínaly. Je to možné?

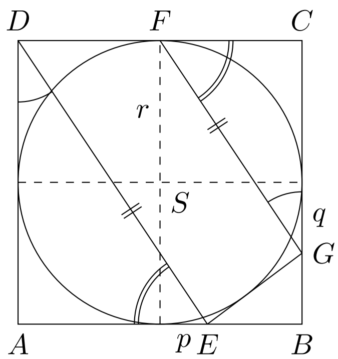
Řešení. Možné to je. Nejprve ukažme, jak to udělat pro nějakou konkrétní kofiguraci teček. Možné řešení zobrazuje první obrázek.
Nyní je třeba rozmyslet, že nezáleží na umístění puntíků na hrnečku. Tato skutečnost je zřejmá, uvědomíme-li si, že čáry můžeme libovolně kroutit a deformovat, aniž bychom je překřížili. Způsob „přesunutí" puntíku při zachování čar ukazuje druhý obrázek:





Úloha 6.6. Nový Hloupětínský park měl tvar čtverce $ABCD$. Byly z něj čtyři východy a to ve vrcholu D, v bodě E nacházejícím se na hraně AB tak, že $|\boldsymbol{AE}| > |\boldsymbol{BE}|$, dále v bodě F, jenž je středem CD. Poslední východ byl v bodě G, který ležel na hraně BC tak, že FG bylo rovnoběžné s DE. Ukažte, že přímka EG se dotýká kružnice vepsané do čtverce.

Řešení. Při řešení využijeme tvrzení, že přímka $\overline{EG}$ je tečna ke kružnici $k(S,r)$ právě tehdy, když $\mathrm{dist}(S,\overline{EG}) = r$. Nejprve si zavedeme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v S, kde $k(S,r)$ je kružnice vepsaná do čtverce $ABCD$. Potom platí $E[p,-r]$ a $G[r,-q]$ s $p > 0$. Pre lepší představu si všechny údaje ze zadání shrňme v nasledujícím obrázku:



V této soustavě souřadnic je rovnice přímky $\overline{EG}$ $(q-r)x + (r-p)y = pq - r^2$. Tedy

$$\mathrm{dist}(S,\overline{EG}) = \frac{|pq - r^2|}{\sqrt{(q-r)^2 + (r-p)^2}}.$$

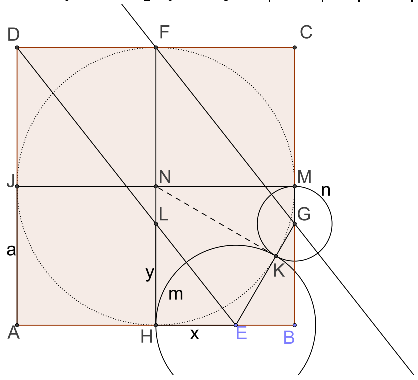
Dále využijeme faktu, že úsečky DE a FG jsou rovnoběžné, tedy $\triangle AED$ a $\triangle GCF$ jsou podobné podle věty *uu*. Z podobnosti uvedených trojuhelníků máme $\frac{r+p}{2r} = \frac{r}{r+p}$, odkud dostáváme $r^2 - pq = r(p+q)$. Zbývá upravit jmenovatel t.j.

$$(q-r)^2 + (r-p)^2 = q^2 + p^2 + 2(r^2 - r(p+q)) = (p+q)^2.$$

BRKOS Team 2014

Konečně $\operatorname{dist}(S, \overline{EG}) = \frac{r|p+q|}{|p+q|} = r$, a tím je důkaz hotový.

2. řešení dle Petra Vinceny: Označme $x = |HE|, y = |HL|, a = |HB|$. Ze shodnosti trojúhelníků DLF, FGC podle věty *usu* plyne $y = |HL| = |BG|$.



Z Pythagorovy věty v trojúhelníku EBG plyne:

$$|EG| = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}.$$

Z podobnosti trojúheníků DAE, LHE podle věty *uu* plyne:

$$\frac{2a}{a+x} = \frac{y}{x}.$$

Proto

$$\begin{aligned}
2ax &= y(a+x) \\
2ax - 2xy - 2ay &= -2ax \\
x^2 + y^2 + a^2 + 2ax - 2xy - 2ay &= y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + (a-x)^2 \geq 0 \\
\sqrt{x^2 + y^2 + a^2 + 2ax - 2xy - 2ay} &= \sqrt{y^2 + (a-x)^2} \\
|HE| + |GI| = x + a - y &= \sqrt{y^2 + (a-x)^2} = |EG|.
\end{aligned}$$

Platí tedy $|HE| + |GI| = |EG|$. Nechť K je bod na úsečce EG splňující $|EK| = |EH|$, $|GK| = |GI|$. Nechť m, n jsou kružnice se středy pořadě E, G a poloměry x, $a-y$. Protože bod K leží na spojnici středů kružnic m,n a současně $K \in m \cap n$, je to jejich dotykový bod. Protože má bod N stejnou mocnost ke kružnicím m, n (je rovna a^2), leží na jejich chordále. Tou je kolmice na přímku EG vedená bodem dotyku K. Platí $|NK| = |NH| = a$, je tedy EG tečnou ke kružnici vepsané našemu čtverci.

Úloha 6.7. Kouma dal Ňoumovi k svátku tabulku oříškové čokolády, která měla $2 \times n$ dílků ve dvou řádcích po n dílcích. Počty oříšků v jednotlivých dílcích byla čísla $1, 2, \ldots, 2n$. Navíc platilo, že v každém sloupečku je stejně oříšků a totéž platilo pro řádky. Určete všechny možné velikosti Ňoumovy čokolády?

Řešení. Počet všech oříšků v celé čokoládě je $1 + 2 + \cdots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$. Ihned vidíme, že pro n liché je toto číslo také liché, takže počty oříšků v řádcích nemohou být stejné. Dále tedy uvažujme pouze sudá n. Počet oříšků v každém sloupci musí podle předchozího být $\frac{n(2n+1)}{n} = 2n+1$, což znamená, že pro každé číslo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, udávající počet oříšků v daném dílku, je jednoznačně určen počet oříšků $2n - k + 1$ ve druhém dílku v onom sloupci. Protože nás nyní zajímá pouze rozdíl oříšků v obou řádcích (chceme,

aby byl nulový), stačí zkoumat, jak k tomuto rozdílu přispěje každý sloupeček. Jelikož $(2n-k-1)-k=2n-2k-1$, přispějí všechny sloupečky postupně čísly $1,3,5,\dots,2n-1$. Každé z těchto čísel přitom bude opatřeno znaménkem plus nebo mínus podle toho, jak jsou dílky v daném sloupci uspořádany. Hledáme tedy vlastně všechna sudá n taková, že prvních n lichých přirozených čísel lze rozdělit na dvě disjunktní množiny se stejným součtem prvků (všechna taková n už zřejmě vyhovují zadání).
Pro $n=2$ dostáváme lichá čísla 1 a 3 a ihned je vidět, že kýžený rozklad neexistuje. Pro $n=4$ máme $1+7=3+5$ a pro $n=6$ máme $1+3+5+9=7+11$. Nakonec indukcí ukážeme, že pokud daný rozklad existuje pro nějaké $m\in\mathbb{N}$, pak existuje také pro $m+4$. Stačí totiž k jedné z množin přidat čísla $2m+1, 2m+7$ a ke druhé $2m+3, 2m+5$, neboť tyto dvojice mají stejný součet.
Úloze proto vyhovují právě všechna přirozená sudá čísla větší než 2.