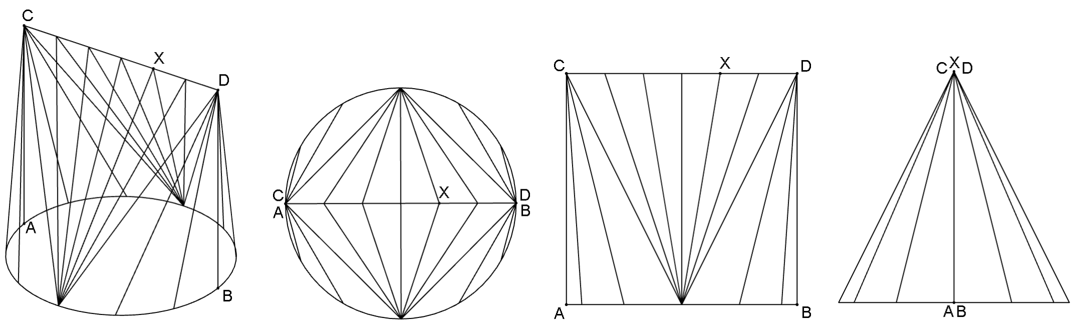
Řešení 5. série

Stereometrie

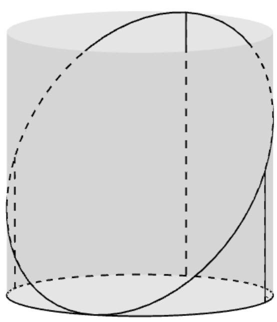
autor: *Stopa*

Úloha 5.1. Bubla dostala k svátku konvexní těleso. Když se na něj podívala seshora, viděla kruh, když zepředu, uviděla čtverec, a když zboku, mělo těleso tvar rovnoramenného trojúhelníku. (Tedy kolmé rovnoběžné promítání ze tří navzájem kolmých směrů.) Jak mohlo takové těleso vypadat? Těleso vhodným způsobem popište, případně také načrtněte.

Řešení. Řešení lze provést různými způsoby. Pro ukázku uvedeme jedno z nich. Nejprve si vytvoříme kruhovou podstavu K. Budeme-li vše dále konstruovat pouze nad tímto kruhem, máme zaručeno, že shora bude těleso vypadat jako kruh. Dále zkonstruujme nad průměrem AB tohoto kruhu čtverec $ABCD$ kolmý k rovině kruhu. Bude-li dále vše pouze před nebo za tímto čtverem, máme zaručeno, že zepředu bude těleso mít tvar čtverce. Nechť tedy námi hledané těleso je sjednocením všech kuželů s podstavou K a vrcholem X takových, že X leží na úsečce $\overline{CD}$. Toto těleso zřejmě bude konvexní a protože každý z kuželů vypadá „zboku“ jako tentýž rovnoramenný trojúhelník, bude i jejich sjednocení tuto podmínku splňovat.



Na závěr ještě obrázek ukazující, proč nestačí rozříznout válec „podél úhlopříčky“.

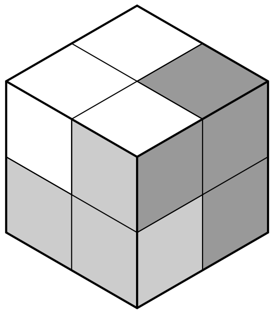


Je vidět, že útvar sice shora jako kruh vypadá, zboku to bude rovnoramenný trojúhelník, ale zepředu ze čtverce zůstala pouze spodní polovina, kdežto horní polovina bude mít tvar půlkruhu.

BRKOS Team 2014

Úloha 5.2. Matěj má kostku o hraně 2 a chtěl by ji polepit samolepkami ve tvaru T-tetromina tvořeného 4 čtverci o straně 1. Podaří se Matějovi kostku polepit celou, aniž by se samolepky překrývaly?

Řešení. Matějovi se to opravdu podařit může. Jedno z možných polepení je zobrazeno na následujícím obrázku (neviděné tři stěny krychle jsou pochopitelně polepeny analogicky):



Úloha 5.3. Henry měl tři různě velké kružnice k, l, m a žádné dvě se mu neprotínaly. Přišel Matěj a průsečík vnějších tečen l a m označil A. Pak Liběnka označila průsečík vnitřních tečen m a k jako B. Nakonec Bubla označila průsečík vnitřních tečen k a l jako C. Henry se najednou zaradoval, protože body A, B a C ležely na přímce. Uměli byste tuto skutečnost dokázat?

Řešení.

Lemma. Nechť X a Y jsou dva rotační kužely v prostoru, které mají shodné vrcholové úhly a rovnoběžné osy. Pak existují dvě různé roviny, které jsou tečné k oběma kuželům.

Důkaz. Každá rovina, která se dotýká kuželu X zřejmě svírá s jeho osou stejný úhel (označme jej α). Naopak zřejmě každá rovina jdoucí vrcholem kužele X a svírající s jeho osou úhel α se jej dotýká. Velikost úhlu α je navíc zřejmě polovina vrcholového úhlu. Uvažme nyní rovinu jdoucí oběma vrcholy kuželů X a Y svírající s osou X úhel α. Tato rovina zřejmě svírá stejný úhel také s osou Y (osy jsou rovnoběžné), a tedy protože kužely mají shodné vrcholové úhly bude tečná k oběma kuželům. Zřejmě budou tyto roviny existovat dvě. □

Nyní zpět k úloze. Přenesme si problém do prostoru. Nechť tedy rovina, ve které se problém odehrává je ρ. Dále uvažme trojici kuželů K, L, M se shodnými vrcholovými úhly, jejichž osy jsou kolmé k rovině ρ a protínají tuto rovinu pořadě právě v kružnicích k, l, m. Orientaci kuželů navíc zvolme tak, aby kužely K a L měly vrcholy na opačné straně roviny ρ než kužel M.

Pak ke kuželům K a L existují tečné roviny γ_1 a γ_2, ke kuželům L, M roviny α_1, α_2 a ke kuželům M, K tečné roviny β_1, β_2. Zřejmě bod A je průsečíkem α_1, α_2 a ρ a zejména tedy leží na průsečnici rovin α_1 a α_2, což je spojnice vrcholů kuželů L a M. Analogická vlastnost platí pro body B a C.

Nyní uvažme rovinu σ, která prochází vrcholy kuželů K, L, M. Z výše uvedeného plyne, že v této rovině leží také body A, B a C. Pak ale tyto body leží jak v rovině ρ, tak v rovině σ a musí tedy ležet na jejich průsečnici, což je přímka. Tím je důkaz hotov.

Úloha 5.4. Liběnka si do prostoru narýsovala čtyřstěn $ABCD$ a z každého vrcholu si spustila kolmici na protější stěnu. Byla zklamaná, že se jí žádné dvě její prostorové výšky neprotínají, ale to už přišel Matěj a hned ji utěšil. Prozradil jí totiž, že příčka libovolných dvou takových výšek procházející vrcholem čtyřstěnu neležícím na žádné z nich prochází zároveň také zbylými dvěma výškami. Dokažte toto tvrzení.

Řešení. Zavedeme si pravoúhlý souřadnicový systém s počátkem v rovině ABC a osou z tak, aby bod D měl souřadnice $[0,0,1]$. Pak nechť $A = [a,b,0]$, $B = [c,d,0]$, $C = [e,f,0]$. Pak tedy směrové vektory hran čtyřstěnu jdoucích vrcholem D jsou $\overrightarrow{DA} = (a,b,-1)$, $\overrightarrow{DB} = (c,d,-1)$, $\overrightarrow{DC} = (e,f,-1)$. Označme paty „výšek" proti vrcholům A, B, C čtyřstěnu po řadě jako A_0, B_0, C_0. Pak směrové vektory přímek AA_0, BB_0, CC_0 získáme vektorovým součinem jako

$$\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{VB} \times \overrightarrow{VC} = (f-d, c-e, cf-de)$$
$$\overrightarrow{BB_0} = \overrightarrow{VC} \times \overrightarrow{VA} = (b-f, e-a, eb-fa)$$
$$\overrightarrow{CC_0} = \overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB} = (b-d, a-c, ad-bc)$$

Pak tedy parametrické vyjádření výšek je následující:

$$\overleftrightarrow{AA_0}: \quad (a,b,0) + r(f-d, c-e, cf-de), \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$
$$\overleftrightarrow{BB_0}: \quad (c,d,0) + r(b-f, e-a, eb-fa), \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$
$$\overleftrightarrow{CC_0}: \quad (e,f,0) + r(b-d, a-c, ad-bc), \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

Náš další postup bude následující: Nalezneme průsečík X roviny DAA_0 s přímkou BB_0. Pak ukážeme, že složky vektoru $\overrightarrow{DX}$ jsou cyklické pro dvojice $((a,b),(c,d),(e,f))$ (tedy, že cyklickou záměnou těchto dvojic se složky vektoru nezmění až na násobení konstantou). Přímka $D + r\overrightarrow{DX}, r \in \mathbb{R}$ je zřejmě příčkou AA_0 a BB_0 a bude-li její směrový vektor cyklický ve zmíněných dvojicích, půjde také o příčku BB_0 a CC_0, což chceme dokázat.
Rovina DAA_0 má parametrické vyjádření:

$$VAA_0 : A + s\overrightarrow{VA} + t\overrightarrow{AA_0} = (a,b,0) + s(a,b,-1) + t(f-d, c-e, cf-de), \quad s,t \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

Hledáme-li její průsečík s BB_0, hledáme vlastně hodnoty parametrů r,s,t tak, aby platilo (**??**) = (**??**) neboli

$$(f-b)r + as + (f-d)t = c-a,$$
$$(a-e)r + bs + (c-e)t = d-b,$$
$$(fa-eb)r - s + (cf-de)t = 0.$$

To je lineární soustava tří rovnic o třech neznámých. Tuto soustavu můžeme vyřešit jednou z mnoha metod (dosazování, Gaussova eliminace, atd.) nebo si můžeme na tomto místě vypomoci nějakým výpočetním softwarem. Nás zajímá především hodnota r:

$$r = \frac{-acdf - ac + ad^2e + ae + bc^2f - bcde - bd + bf + c^2 - ce + d^2 - df}{(ae+bf+1)(ad-af-bc+be+cf-de)}$$

Nyní tedy upravujme výraz $(0,0,1) - ((c,d,0) + r(b-f, e-a, eb-fa))$. Protože jde o vektor, u nějž nás zajímá pouze směr, můžeme po převedení na jeden zlomek upravovat už pouze čitatel:

$$\begin{aligned}
x:\ & c(ae+bf+1)(ad-af-bc+be+cf-de)+\\
&+(-acdf-ac+ad^2e+ae+bc^2f-bcde-bd+bf+c^2-ce+d^2-df)(b-f)\\
y:\ & d(ae+bf+1)(ad-af-bc+be+cf-de)+\\
&+(-acdf-ac+ad^2e+ae+bc^2f-bcde-bd+bf+c^2-ce+d^2-df)(e-a)\\
z:\ & (-acdf-ac+ad^2e+ae+bc^2f-bcde-bd+bf+c^2-ce+d^2-df)(eb-fa)
\end{aligned}$$

Po úpravě vidíme, že se skutečně jedná o cyklické výrazy:

$$\begin{aligned}
x:\ & abe-abc+cda-cde+efc-efa+\\
&+bd^2-b^2d+df^2-d^2f+fb^2-f^2b+\\
&+a^2cde-b^2cde+c^2efa-d^2efa+e^2abc-f^2abc+\\
&+b^2cef-a^2cef+d^2eab-c^2eab+f^2acd-e^2acd\\
y:\ & abd-abf+cdf-cdb+efb-efd\\
&+ae^2-e^2a+ca^2-c^2a+ec^2-e^2c\\
&+a^2cdf-b^2cdf+c^2efb-d^2efb+e^2abd-f^2abd+\\
&+b^2def-a^2def+d^2fab-c^2fab+f^2bcd-e^2bcd\\
z:\ & ad-af+cf-cb+eb-ed+\\
&+a^2de+b^2de+c^2fa+d^2fa+e^2bc+f^2bc-\\
&-a^2fc-b^2fc-c^2be-d^2be-e^2da-f^2da\\
&+abc^2f^2+cde^2b^2+efa^2d^2-abe^2d^2-cdb^2e^2-efd^2a^2
\end{aligned}$$

Tím je naše tvrzení dokázáno.

Úloha 5.5. Do Hloupětína přišla každoroční várka čtyř Lenošínských kladných reálných čísel. Hloupětínští zjistili, že pro každá dvě z nich platí, že jejich součin nepřesahuje jejich součet. Už se jim ale nepovedlo ukázat, že součin všech čtyř nepřesahuje dvojnásobek jejich součtu. Dokážete to vy?

Řešení. Označme zadaná kladná reálná čísla jako a, b, c, d. Ze zadání víme, že platí těchto šest nerovností:

$$ab \leq a+b \tag{5.5}$$
$$ac \leq a+c \tag{5.6}$$
$$ad \leq a+d \tag{5.7}$$
$$bc \leq b+c \tag{5.8}$$
$$bd \leq b+d \tag{5.9}$$
$$cd \leq c+d \tag{5.10}$$

Protože na obou stranách všech nerovností jsou kladná čísla, můžeme vynásobit nerovnosti (**??**) a (**??**):

$$abcd \leq (a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd.$$

Sečtením nerovností (**??**)-(**??**) dále získáme

$$ac+bc+ad+bd \leq (a+c)+(b+c)+(a+d)+(b+d) = 2(a+b+c+d).$$

Díky tranzitivitě nerovnosti odtud dostáváme

$$abcd \leq 2(a+b+c+d),$$

což jsme chtěli dokázat.

Úloha 5.6. Kouma se vychloubal Ňoumovi, že jeho funkce $f(x)$ lze jednoznačně zapsat jako součet dvou funkcí $s(x)$ a $l(x)$, kde $s(x)$ je sudá (pro každé x je $s(x) = s(-x)$) a $l(x)$ je lichá (pro každé x je $l(x) = -l(-x)$). Ňouma se mu ale vysmál: „Vždyť to přece platí pro každou funkci definovanou na symetrickém definičním oboru (pokud x je v definičním oboru, pak i $-x$ v něm je)!" Uměli byste tuto skutečnost dokázat?

Řešení. Funkce $s(x)$ a $l(x)$ musí splňovat

$$\begin{aligned} s(x) + l(x) &= f(x), \\ s(-x) + l(-x) &= f(-x). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Protože však $s(-x) = s(x)$ a $l(-x) = -l(x)$ dostáváme také

$$s(x) - l(x) = f(-x). \tag{5.12}$$

Sečtením a odečtením polovin (**??**) a (**??**) získáme

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ l(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Tyto funkce zřejmě splňují, že jejih součet je funkce $f(x)$ a z postupu je navíc zřejmé, že rozklad je jednoznačný. Tím je tvrzení dokázáno. Na zamyšlení čtenáři pak ponecháme rozbor možnosti, že definičním oborem je prázdná množina.

Úloha 5.7. Hloupětínští se se zásilkou do Lenošína snažili více. Nejprve vybrali libovolná přirozená čísla n a $k \leq n$. Pak vybrali taková přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ splňující $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, že číslo $A = x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{x_k}}}}$ bylo maximální. Nakonec poslali číslo A. Vaším úkolem je toto číslo určit.

Řešení. Zaveďme si nejprve pomocné označení: věží přirozených čísel délky k $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ rozumíme číslo $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_k}}}}$. Dále označme $A_k(n)$ největší věž délky k přirozených čísel $a_1, \ldots, a_k$ takových, že $a_1 + \cdots + a_k = n$. Tedy $A_k(n)$ je námi hledaná hodnota A.

Stačí uvažovat pouze $1 < k < n$, neboť v krajních případech je situace jednoduchá a maximum (jediné možnosti) jsou (n), resp. $(1, \ldots, 1)$. Jistě pro $2k > n$ bude věž $A(n)$ určitě končit několika jedničkami. Jak potom tato věž vypadá? Pokud by totiž bylo $A_k(n) = (a_1, \ldots, a_m, 1, \ldots, 1)$ tak, že některé $a_i, 1 \leq i \leq m$ bylo větší než 2, měli bychom větší věž $(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_m, 2, 1 \ldots, 1)$ (jistě už $(a_i - 1)^2 > a_i$ a exponent bude alespoň dvojnásobek původního). Stejným arguemntem se lze přesvědčit, že tato situace nastane právě tehdy, když $2k > n$ a pak je tedy maximální věž $(2, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$.

Nechť tedy naše věž nekončí jedničkami. Pro malá čísla je situace jednoduchá a tedy nechť dále $n, k > 1$. Nechť nyní $A_k(n)$ lze realizovat pomocí věže $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Pak jistě $a_i > 1$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Jistě $A_k(n)$ je rostoucí funkce na přirozených číslech, neboť

$A_k(n+1) \geq A_k(n) + 1$ (můžeme použít věž $(a_1 + 1, \ldots, a_k)$).

Ukažme nyní, že $A_k(n+1) \geq 2A_k(n)$. To plyne z toho, že jistě věž délky $k-1$ $(a_2, \ldots, a_k) \leq A_{k-1}(n - a_1)$ a tedy $A_k(n) = \max\{j^{A_{k-1}(n-j)} | 2 \leq j \leq n-2\}$. Odtud snadno dostáváme $A_k(n+1) \geq {a_1}^{A_{k-1}(n-a_1+1)} \geq {a_1}^{A_{k-1}(n-a_1)+1} \geq 2A_k(n)$.

Nechť nyní $b, c \in \mathbb{N}$, $b > 1$. Pak platí $\frac{log(b+1)}{log(b)} < 2$ (neboť $b + 1 < b^2$). A tedy pro $c \geq 4$ dostáváme $\frac{A_k(c+1)}{A_k(c)} \geq 2$, a tedy máme $b^{A_k(c+1)} > (b+1)^{A_k(c)}$ (pro $b > 1, c \geq 4$ a $k > 1$).

Je tedy jasné, že optimální věž délky k je $(2, 2, \ldots, l, m)$, kde $(l, m) = A_2(n - 2k + 4)$. Zbývá tedy určit, jak bude vypadat nejlepší věž délky 2 pro libovolné n.
V tom však nastává problém. Při exaktním řešení hledání maxima funkce x^{n-x} na intervalu $(1, n)$ narazíme v první řadě na algebraicky neřešitelnou rovnici. Její řešení lze vyjádřit pomocí tzv. Lambertovy W funkce, která je daná vztahem $z = W(z)e^{W(z)}$. Maximum funkce x^{n-x} pak nastane pro $x = n/W(en)$. To je však zpravidla reálné číslo a nás zajímá řešení v celých číslech. Pro většinu hodnot n lze jednoduše x zaokrouhlit, ale obecně to provést nelze. Hledání maxima v celých číslech je tedy velice složitý problém a ještě jednou se tak omlouváme za zadání prakticky neřešitelné úlohy.