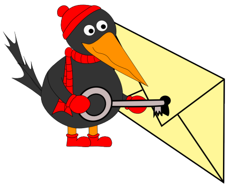
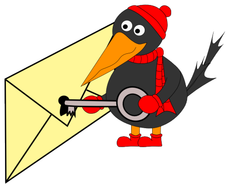
Řešení 4. série



Počítání v celých číslech



autor: *Janča a Vláďa*

Úloha 4.1. Zatímco Bubla lovila vánočního kapra, dumala nad tím, proč skoro nikdy není postavou prvního příkladu. Napadlo ji, že kdyby našla všechna prvočísla p, q, která splňují $p^q + pq = 323$, pomohlo by jí to získat respekt v očích ostatních postav. Pomozte jí!

Řešení. Protože $q > 1$, můžeme po úpravě $p(p^{q-1} + q) = 323$ usoudit, že p dělí $323 = 17 \cdot 19$, tedy (díky prvočíselnosti p) dostáváme $p = 17$ nebo $p = 19$. Navíc pro liché q bychom na levé straně dostali sudé číslo, proto je jedinou možností $q = 2$. Přitom dvojice $p = 17, q = 2$ skutečně vyhovuje.

Úloha 4.2. Liběnka zrovna balila prvočíselné dárky pro ostatní, když za ní přiběhl Matěj a pokřikoval: „Koukej, Liběnko, pokud p a $p^2 + 8$ jsou prvočísla, pak $p^3 + 4$ a $p^4 + 2$ musí být také!“. Liběnka Matějovi vůbec nevěřila, ale Matěj jí ukázal bezchybný důkaz svého tvrzení. Dokázali byste to také?

Řešení. Stačí si uvědomit, že každé prvočíslo p kromě 3 je tvaru $3k + 1$ nebo $3k - 1$ (jinak by bylo dělitelné třemi). Pak je ovšem výraz $p^2 + 8 = (3k \pm 1)^2 + 8 = 9k^2 \pm 6k + 9$ dělitelný třemi a zároveň větší než 3, proto to nemůže být prvočíslo. Předpoklady zadané implikace tedy mohou být splněny pouze pro $p = 3$, a skutečně: $3, 3^2 + 8 = 17, 3^3 + 4 = 31$ a $3^4 + 2 = 83$ jsou všechno prvočísla

Úloha 4.3. Bubla se mezitím venku koulovala s Henrym. Jednou sněhovou koulí zasáhla Henryho opravdu tvrdě do nosu. Henry se chvíli rozkoukával a pak si všiml, že je ta koule vyztužená papírem. Už se chtěl ohradit, že to není fér, když si všiml, že je na papíru napsána rovnice

$$(2a - b)^2 \left(1 + 4b^2 + 3a(3a - 4b)\right) = 2\left(2a(2b - 3a + 1) - b(2b - 3a) - b - 1\right)$$

pro celá čísla a, b. Než se Bubla přišla omluvit, už ji měl skoro vyřešenou. Zvládnete to dříve než on?

Řešení. Použitím substituce $2a - b = u$, $2b - 3a = v$ dostaneme rovnici do tvaru $u^2(1 + v^2) = 2((v + 1)u - 1)$, což po roznásobení a převedení na jednu stranu dává $u^2 + u^2v^2 - 2u - 2uv + 2 = 0$, což dále můžeme upravit na součet čtverců (druhých mocnin) $(u - 1)^2 + (uv - 1)^2 = 0$, odkud dostáváme $u = 1$, $uv = 1$, a tedy i $v = 1$. Jednoduchým dopočítáním dostáváme jediné řešení $a = 3, b = 5$.

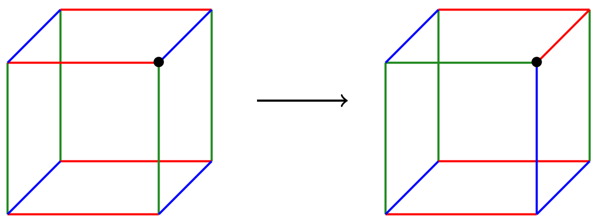
Úloha 4.4. Hloupětínští si na náměstí tesali ledové sochy známých matematiků. Avšak v noci, když už všichni spali, někdo do sochy Diofanta vytesal rovnici $(2x)^{3x} + 4 = 7y$. Hloupětínští se rozhodli, že nebudou hledat viníka, nýbrž se tuto rovnici pokusí vyřešit, a to pěkně v celých číslech. Vůbec se jim to nedařilo, a tak se obrátili na Lenošín. Ovšem nikomu z Lenošína se nechtělo sousedům pomoci. Dokážete zachránit Hloupětín před potupou a vyřešit tuto rovnici v celých číslech?

Řešení. Nejprve si rozmyslíme, že pro $x \leq 0$ dostaneme na levé straně necelé číslo, proto se stačí omezit na $x > 0$. Potom už můžeme mluvit o zbytku po dělení. Protože pravá strana je jistě celé číslo dělitelné sedmi, levá strana rovněž musí být. Avšak $(2x)^{3x} = ((2x)^x)^3$ a po zavedení substituce $a = (2x)^x$, což je díky $x > 0$ celé číslo, stačí říct, že a^3 modulo 7 může dávat pouze zbytky $\pm 1, 0$, tedy levá strana může dávat zbytky $3, 4, 5$, nikdy však 0. Rovnice tedy nemá řešení.

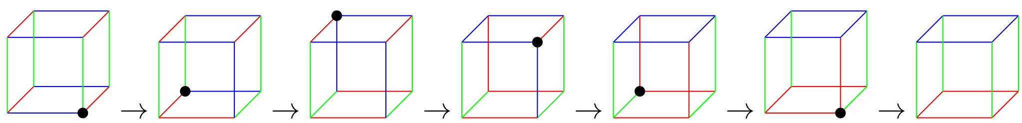
Úloha 4.5. Matěj ve sněhu vyšlapal trojúhelník ABC a také body A', B', C', které byly obrazy vrcholů A, B, C v osové souměrnosti postupně podle stran BC, CA a AB. Liběnka ho upozornila: „Matěji, to tě ani trochu nezarazilo, že body A' a B' splývají?“ Matěj se zatvářil rozpačitě. „Ale-pak přece bod C' musí být střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, ne?“ Měl Matěj pravdu?

Řešení. Přímka BC je kolmá na úsečku AA' a zároveň jde jejím středem. Je to tedy zároveň výška i těžnice trojúhelníku ABA' a ten tedy musí být rovnoramenný se základnou AA'. Podobně však musí být také rovnoramenný trojúhelník ABB' se základnou BB'. Splývají-li tedy body A' a B', musí být $ABA' = ABB'$ trojúhelník rovnostranný. Pak ale zřejmě bod C' leží na kružnici opsané ABA' se středem C (z mnoha důvodů, od jednoduchých, jako jsou úvahy o vzdálenostech, až po argumentace Švrčkovým bodem) a tedy bod C musí ležet na jejím obraze podle přímky AB se středem C', což jsme chtěli dokázat.

Úloha 4.6. Kouma si hrál s obyčejnou šestistěnnou kostkou. Jednu její hranu obarvil červeně. To se mu však zdálo málo, tak obarvil červeně všechny hrany s ní rovnoběžné. To mu taky nestačilo, tak si vybral nějakou neobarvenou hranu a obarvil ji i všechny hrany s ní rovnoběžné na zeleno. Zbytek neobarvených hran nakonec obarvil na modro. Pak si kostku půjčil Ňouma a začal přebarvovat hrany tak, že si vždy vybral jeden vrchol a hrany přebarvil „do kruhu“, tedy pro tři hrany vycházející z tohoto vrcholu přebarvil první na barvu druhé hrany, druhou na barvu třetí hrany a třetí na barvu první hrany. Koumovi se to líbilo a začal přemýšlet nad tím, jestli takhle dokáže přebarvit celou kostku tak, aby jedna stěna měla všechny hrany červené a protilehlá stěna měla všechny hrany modré. Může se to Koumovi podařit?



Řešení. Existuje mnoho způsobů, jak se dopracovat kýženého výsledku. Tohle je jeden z nich (Karolína Kuchyňová):



Úloha 4.7. Henry se rozhodl ozdobit vánoční stromeček koulemi o 100 různých barvách. Nakoupil proto spoustu balení (už zapomněl kolik, ale určitě jich bylo alespoň 40425), z nichž každé obsahovalo právě čtyři koule různých barvách a každá měla některou ze 100 daných barev. Navíc platilo, že žádná dvě balení neměla společné více než dvě barvy. Dokažte, že z Henryho balení lze vybrat 49 takových, že dohromady obsahují všech 100 barev, ale libovolných 48 z nich už tuto vlastnost nemá.

Řešení. Označme množinu všech daných barev A a množiny barev v daných baleních $A_1, A_2, \ldots, A_m$, kde $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 40425$. Uvažme nyní všechny dvouprvkové podmnožiny těchto množin $A_1, \ldots, A_m$, celkem jich je $\binom{4}{2}m = 6m$. Přitom všech dvouprvkových podmnožin množiny A je $\binom{100}{2} = 4950$. Máme tedy alespoň $6m \geq 6 \cdot 40425 = 49 \cdot 4950$ vybraných dvouprvkových množin a přitom jen 4950 možných dvouprvkových množin, proto podle Dirichletova principu musí existovat barvy $x, y \in A$, které patří do alespoň 49 podmnožin $A_1, \ldots, A_m$, BÚNO nechť to jsou $A_1, \ldots, A_{49}$. Tyto množiny už však kromě x a y nemají žádné další společné barvy, proto má jejich sjednocení $2 + 49 \cdot 2 = 100$ prvků, tudíž je to celé A. Naopak sjednocení libovolných 48 z nich má ze stejného důvodu nejvýše $2 + 48 \cdot 2 = 98$, takže to nemůže být celé A.