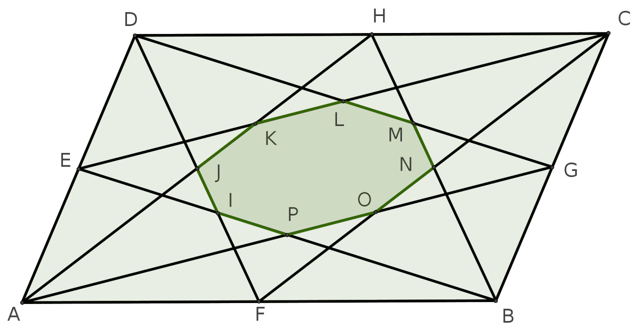
Řešení 2. série

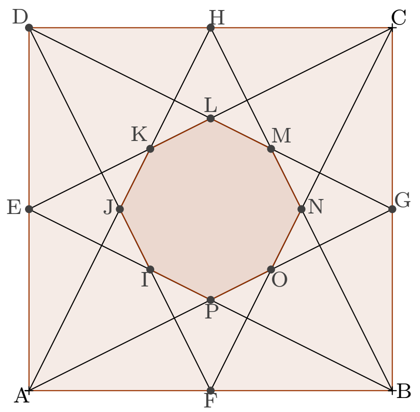
Geometrická zobrazení

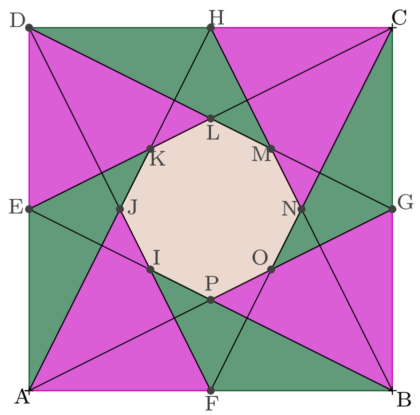
autor: *Áďa a Ted*

Úloha 2.1. Bubla by si chtěla na Maťejově políčku tvaru rovnoběžníku $ABCD$ zasadit mrkvový lán. Matěj jí vyhověl a vymezil osmiúhelníkový záhon $IJKLMNOP$ tak, že vyměřil body E, F, G, H jako středy stran DA, AB, BC, CD a spojnicemi těchto středů a hraničních bodů protějších stran vymezil nový záhonek. Bubla si také hned spočítala, že bude tento záhon velký natolik, aby pokryl rodinnou spotřebu mrkve. Označme $|AB| = a$, $|BC| = b$ a $|\angle ABC| = \alpha$. Určete obsah mrkvového záhonu v závislosti na parametrech a, b, α.



Řešení. Uvažme afinní zobrazení, které zobrazí repér $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ na repér $([0,0], (1,0), (0,1))$. Jedná se o afinní zobrazení, tedy dle věty 0.8. zobrazení zachovávající poměry velikostí obsahů. Proto je poměr obsahu osmiúhelníka $IJKLMNOP$ ku obsahu rovnoběžníku $ABCD$ roven obsahu takového osmiúhelníka v jednotkovém čtverci:





Čtverec $ABCD$ lze rozložit na náš osmiúhelník a dvě čtveřice shodných trojúhelníků. Ty jsou shodné, neboť na sebe přejdou v rotaci kolem středu čtverce o $\frac{\pi}{2}$. Obsah našeho

osmiúhelníku je přitom roven rozdílu obsahu čtverce $ABCD$ a čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků AFJ a FBI, jak je vidět na obrázku vpravo.
Protože jsou body E, F středy stran DA, AB v trojúhelníku ABD, je bod I těžištěm tohoto trojúhelníka a dělí těžnici DF v poměru $2:1$. Z principu redukčního úhlu potom plyne, že výška v trojúhelníku FBI spuštěná z bodu I má délku $\frac{1}{3}$. Protože je $|FB| = \frac{1}{2}$, je obsah trojúhelníka FBI roven $\frac{1}{12}$.
Bod J je průsečík úhlopříček v obdélníku $AFHD$. Proto má výška spuštěná z bodu J v trojúhelníku AFJ délku $\frac{1}{2}$. Protože je $|AF| = \frac{1}{2}$, je obsah trojúhelníka AFJ roven $\frac{1}{8}$.

Obsah osmiúhelníku $IJKLMNOP$ je proto roven $1 - 4 \cdot \frac{1}{12} - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$.

Úloha 2.2. Mezitím do Matěje hustila Liběnka zadání svojí úlohy. „Máš dvě kružnice k, l se středy S_1, S_2 a poloměry 5 a 2 takové, že vzdálenost jejich středů je 6. Bod A najdeš na polopřímce opačné k polopřímce $\mapsto S_2S_1$ a platí $|AS_2| = 4$."
Liběnka nechala Matěje, ať si zvolí libovolné přímky p, q procházející bodem A, tak, že každá z těchto dvou přímek protíná sjednocení kružnic $k \cup l$ ve čtyřech bodech. „Označme čtyři průsečíky přímky p se sjednocením $k \cup l$ postupně od bodu A jako $KXYN$ a podobně průsečíky přímky q se sjednocením $k \cup l$ postupně od bodu A jako $WLMZ$. Co mi řekneš o čtyřúhelníku $KLMN$?"
Dokažte podobně jako se to povedlo Matějovi, že je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.

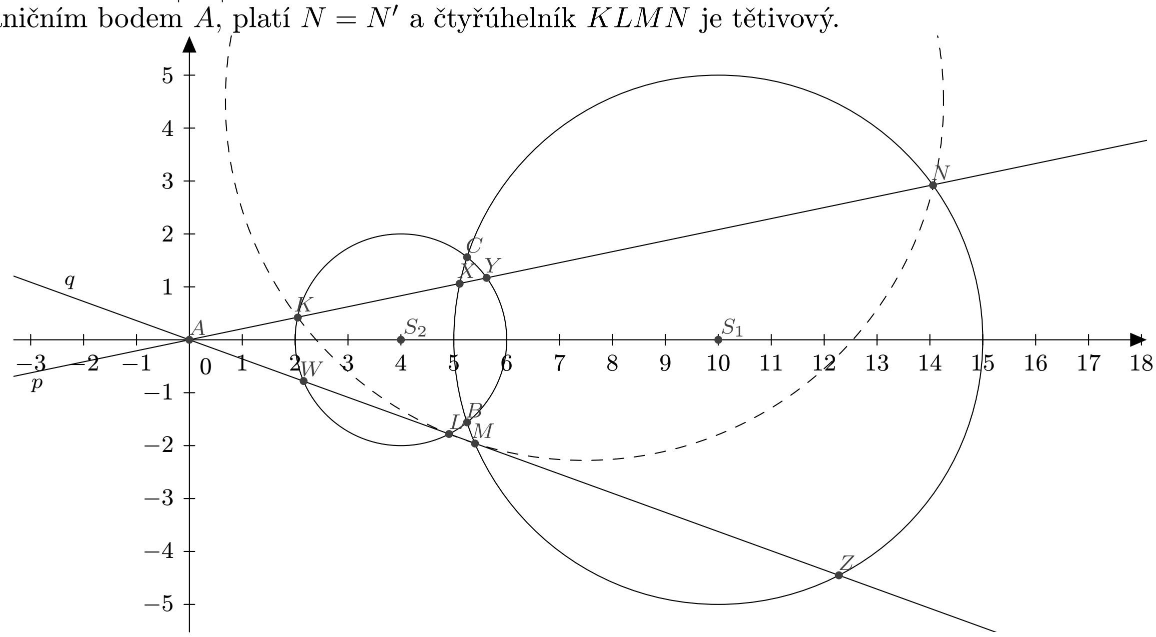
Řešení. Označme B, C průsečíky zadaných kružnic. Protože jsou obě kružnice k, l osově souměrné podle osy S_1S_2, platí $|AB| = |AC|$. Označme tuto vzdálenost $r = |AB|$. V kruhové inverzi podle kružnice se středem v bodě A a poloměrem r se zobrazí kružnice k na kružnici l. Obě přímky p, q se přitom zobrazí samy na sebe, protože prochází bodem A. Proto v tomto zobrazení přejde bod K na bod N a bod L na bod M. Přímo z definice kruhové inverze pak dostaneme

$$|AK| \cdot |AN| = r^2 = |AL| \cdot |AM|,$$

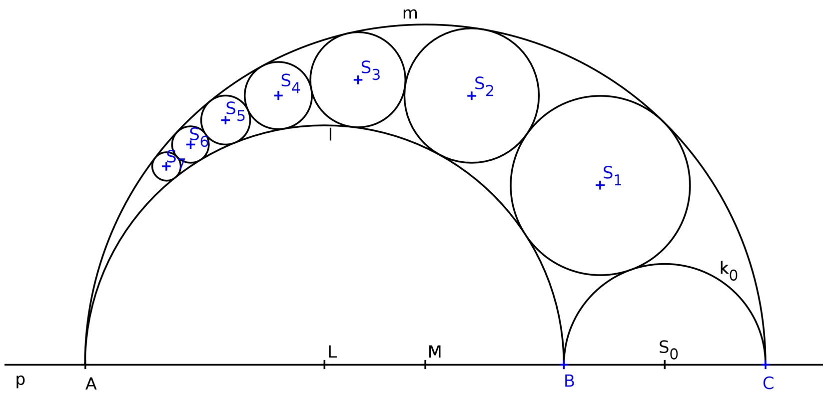
tedy $|AN| = \frac{|AL| \cdot |AM|}{|AK|}$. Nechť m je kružnice opsaná trojúhelníku KLM. Označme N' průsečík kružnice m s přímkou p různý od K. Z mocnosti bodu A ke kružnici m plyne, že

$$|AK| \cdot |AN'| = r^2 = |AL| \cdot |AM|,$$

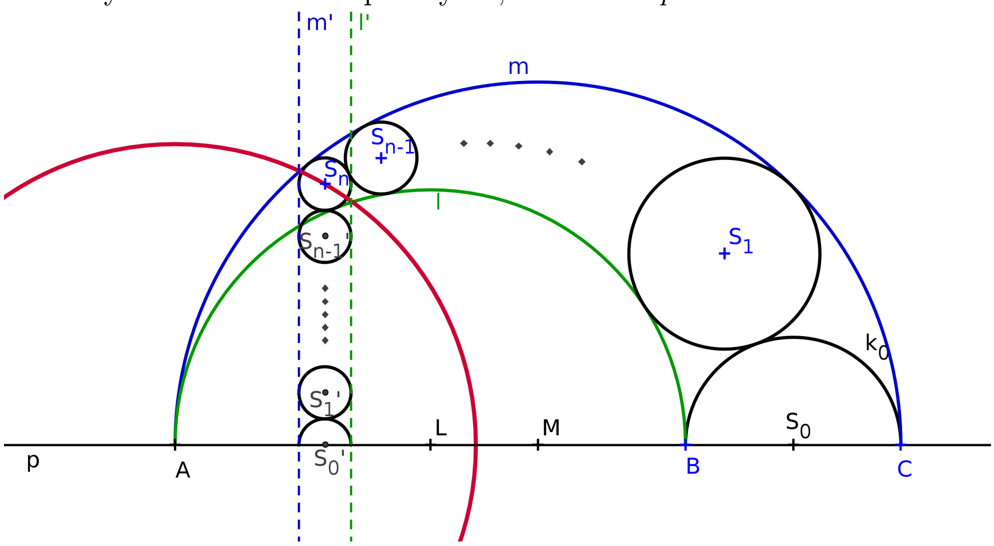
tedy $|AN'| = \frac{|AL| \cdot |AM|}{|AK|} = |AN|$. Protože body N, N' leží zřejmě na stejné polopřímce s hraničním bodem A, platí $N = N'$ a čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový.



Úloha 2.3. Kouma s Ňoumou zamířili do lesa, kde po sobě dřevorubci nechali spoustu pařezů. Zvlášťe je zaujal jeden divně rostlý. Část jeho okraje vymezovala přímka p. Tvořily ho kružnice m, l, k_0,, které se vzájemně dotýkají a jejichž středy ležely na přímce p jako na obrázku. Místo normálních letokruhů se na něm rýsovala posloupnost kružnic $k_1, k_2, \ldots$ majících vnitřní dotyk s m, vnější dotyk s l a navíc měla pro všechna přirozená n kružnice k_n vnější dotyk s kružnicí k_{n-1}. Ňouma si dobře uvědomil, že jde o opravdu starý strom a hned označil d_n průměr kružnice k_n. Pak prohlásil: „Dokaž Koumo, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je vzdálenost středu S_n kružnice k_n od přímky p rovna $n \cdot d_n$.“ Svedete to také?



Řešení. Sestrojme kružnici i se středem v bodě A a poloměrem $|AT|$, kde T je dotykový bod tečny ke kružnici k_n z bodu A a uvažme kruhovou inverzi podle kružnice i. Výhodou této inverze je, že je v ní kružnice k_n samodružná. Protože prochází přímka p bodem A, je také samodružná. Protože leží středy M, L kružnic m, l na přímce p a $A \in m, A \in l$, zobrazí se tyto dvě kružnice na přímky m', l' kolmé na p.



Kružnice $k_0, \cdots, k_n$ neprochází středem A naší kruhové inverze. Proto jsou jejich obrazy kružnice. Vzhledem k tomu, že mají kružnice $k_0, \cdots, k_n$ dotyk s kružnicemi m, l budou se jejich obrazy $k'_0, \cdots, k'_n$ dotýkat obrazů m', l' kružnic m, l. Protože jsou m', l' rovnoběžky, budou mít kružnice $k'_0, \cdots, k'_n$ stejné průměry. Protože je k_n samodružná, mají všechny kružnice $k'_0, \cdots, k'_n$ stejný průměr jako kružnice k_n, tedy d_n.
Protože má pro všechna $i \in \mathbb{N}$ kružnice k_i vnější dotyk s kružnicí k_{i-1}, dotýkají se i jejich obrazy. Nyní je již vidět, že vzdálenost bodu S_n od přímky p je rovna součtu průměrů

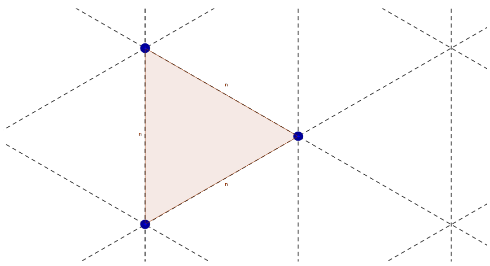
kružnic $k'_{n-1}, k'_{n-2}, \ldots, k'_1$ plus poloměr kružnice k'_n a k'_0, což je dohromady

$$(n-1)d_n + 2 \cdot \frac{d_n}{2} = nd_n,$$

čímž je důkaz hotov.

Úloha 2.4. Aby se Kouma Ňoumovi odvděčil za zajímavou úlohu, sebral tři žetony tvaru šišky a vyskládal je do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně 1. Ňouma teď smí provádět pouze tahy následujícího charakteru: Zvolí si dva ze tří žetonů a otočí jeden kolem druhého o celočíselný násobek 60°, přičemž žetony se nesmí překrývat. Určete, pro která přirozená $n > 1$ může Ňouma po konečně mnoha tazích tohoto typu uspořádat žetony do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně n.

Řešení. Pro každý povolený tah v této hře existuje povolený inverzní tah, kterým vrátím situaci do původního stavu. To, že jsem schopen přeskládat žetony z vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně 1 do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně $n, n \in \mathbb{N}$ je ekvivalentní s tím, že to svedu naopak. Pokud tedy ukážeme, že nelze žetony ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně n přeskládat povolenými tahy do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně 1, ukážeme, že to pro žádné n nelze ani naopak.
Uvažme tedy situaci, kdy jsou žetony ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně n.



Potom ale žetony užitím povolených tahů zůstávají na pravidelné trojúhelníkové síti o straně n. Zřejmě vzdálenost libovolných dvou z nich neklesne pod n. Proto je nikdy nemůžeme uspořádat do vrcholů trojúhelníka o straně 1. Tedy neexistuje žádné takové $n \in \mathbb{N}$, pro které by bylo možné uspořádat povolenými tahy žetony do vrcholů trojúhelníka o straně n z počáteční pozice ve vrcholech jednotkového rovnostranného trojúhelníka.

Úloha 2.5. Bubla s Liběnkou si na trhu koupily čtyři sáčky gumových medvídků. Bubla zjistila, že dva ze sáčků obsahují kvalitní nefalšované medvídky, z nichž každý má přesně 10 gramů, zbylé dva sáčky však podle ní obsahují falešné 9-ti gramové chudinky. Liběnka má za úkol jedním vážením zjistit, které dva pytlíky obsahují falešné medvídky. Kolik nejméně medvídků musí na přesnou digitální váhu položit, aby to zjistila?

Řešení. Označme A, B, C, D koupené sáčky. Dále označme po řadě a, b, c, d počty vážených medvídků ze sáčků A, B, C, D a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hmotnosti medvídků v sáčcích A, B, C, D. Při vážení pak Bubla uvidí na displeji toto číslo:

$$a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d \cdot \delta$$

Ukažme, že počty a, b, c, d vážených medvídků musí být po dvou různé:

Pro spor bez újmy na obecnosti předpokládejme, že Bubla položila na váhu ze sáčků A, B stejné počty medvídků $a = b$. Váha jí jistě ukáže

$$a(\alpha + \beta) + c \cdot \gamma + d \cdot \delta$$

Nyní by však Bubla nebyla by schopna rozlišit tyto dvě situace:

- Pravé medvídky obsahují sáčky A, C a falešné medvídky obsahují sáčky B, D, tedy váha ukazuje $a(10+9)+c\cdot 10+d\cdot 9 = 19a+10c+9d$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky B, C a pravé medvídky obsahují sáčky A, D, tedy váha ukazuje $a(9+10)+c\cdot 10+d\cdot 9 = 19a+10c+9d$.

To ale Bubla v žádném případě nesmí připustit a tak musí být počty a, b, c, d po dvou různé. Nejméně tedy $0+1+2+3=6$. Rozeberme si nyní tento případ. Opět bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a=0, b=1, c=2, d=3$. Pak ale Bubla opět nebude schopna rozlišit tyto dvě situace, z nichž každá může nastat:

- Pravé medvídky obsahují sáčky A, D a falešné medvídky obsahují sáčky B, D, tedy váha ukazuje $10a+9b+9c+10d = 0+9+18+30 = 57$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky B, C a pravé medvídky obsahují sáčky A, D, tedy váha ukazuje $9a+10b+10c+9d = 0+10+20+27 = 57$.

Což Bubla rozhodně nesmí připustit. Proto musí být počet všech vážených medvídků alespoň 7. Podívejme se na možnost, kdy Bubla vybere 4 medvídky ze sáčku A, 2 medvídky ze sáčku B, jednoho z C a z D nevezme žádného. Může nastat těchto 6 možností:

- Pravé medvídky obsahují sáčky A, B, tedy váha ukazuje $10\cdot 4+10\cdot 2+9\cdot 1 = 69$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky A, C, tedy váha ukazuje $10\cdot 4+9\cdot 2+10\cdot 1 = 68$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky A, D, tedy váha ukazuje $10\cdot 4+9\cdot 2+9\cdot 1 = 67$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky B, C, tedy váha ukazuje $9\cdot 4+10\cdot 2+10\cdot 1 = 66$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky B, D, tedy váha ukazuje $9\cdot 4+10\cdot 2+9\cdot 1 = 65$.
- Pravé medvídky obsahují sáčky C, D, tedy váha ukazuje $9\cdot 4+9\cdot 2+10\cdot 1 = 64$.

Vidíme, že každou z těchto možností bude Bubla schopna rozlišit. Odpověď tedy zní, že Bubla musí na váhu položit 7 medvídků, aby si byla jista, že vždy zjistí, které sáčky jsou pravé a které nikoli. Dodejme snad už jen to, že není náhodou, že 7 je součet prvních 4 mocnin čísla dva...

Úloha 2.6. Kouma s Ňoumou šli do lesa na výrazy. Chvíli se procházeli a tu našel Kouma jeden moc pěkný. Ňouma zajásal: „Koukej na tu žížalu, co tu sedí - ta nám moc pomůže!“ „Hmm, ale pořád je to málo,“ odvětil smutně Kouma. O chvíli později však Kouma našel další výraz - byl v díře mezi kořeny spolu s 14 žížalami. Ňouma se pak rozzářil, když opodál uviděl na pěšině třetí výraz. „Tak tohle už by mohlo stačit,“ zavlnil Kouma dlaněmi. A tak je šli domů vyřešit. Řešte v $\mathbb{R}$ soutavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} &= 1\\ \frac{x_2x_3}{x_1}+\frac{x_3x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3} &= 14\\ \frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3} &= \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

Řešení. Řešme tedy následující soustavu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} &= 1\\ \frac{x_2x_3}{x_1}+\frac{x_3x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3} &= 14\\ \frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3} &= \frac{11}{36}.\end{aligned}$$

Zřejmě jsou x_1, x_2, x_3 nenulové. Zbavme se nyní zlomků:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = x_1x_2x_3 \tag{2.1}$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2 = 14x_1x_2x_3 \tag{2.2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{11}{36}x_1x_2x_3. \tag{2.3}$$

Rovnici (2) upravíme do tvaru:

$$(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 14x_1x_2x_3.$$

Zaveďme nyní substituci:

$$\begin{aligned} a &= x_1 + x_2 + x_3\\ b &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\\ c &= x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Čímž dostaneme

$$\begin{aligned} b &= c\\ b^2 - 2ac &= 14c\\ a &= \frac{11}{36}c.\end{aligned}$$

Do druhé rovnice dosadíme z první rovnice za b a ze třetí rovnice za a. Tím dostaneme

$$c^2 - \frac{11}{18}c^2 = 14c,$$

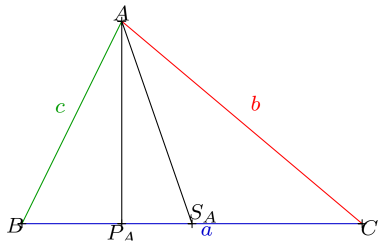
kde c je součin nenulových čísel, tedy jím můžeme bez obav vydělit. Po úpravě dostaneme, že $c = 36$. Z rovnic $a = \frac{11}{36}c$ a $b = c$ dostáváme $a = 11$ a $b = 36$. Tedy

$$\begin{aligned} 11 &= x_1 + x_2 + x_3\\ 36 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\\ 36 &= x_1x_2x_3\end{aligned}$$

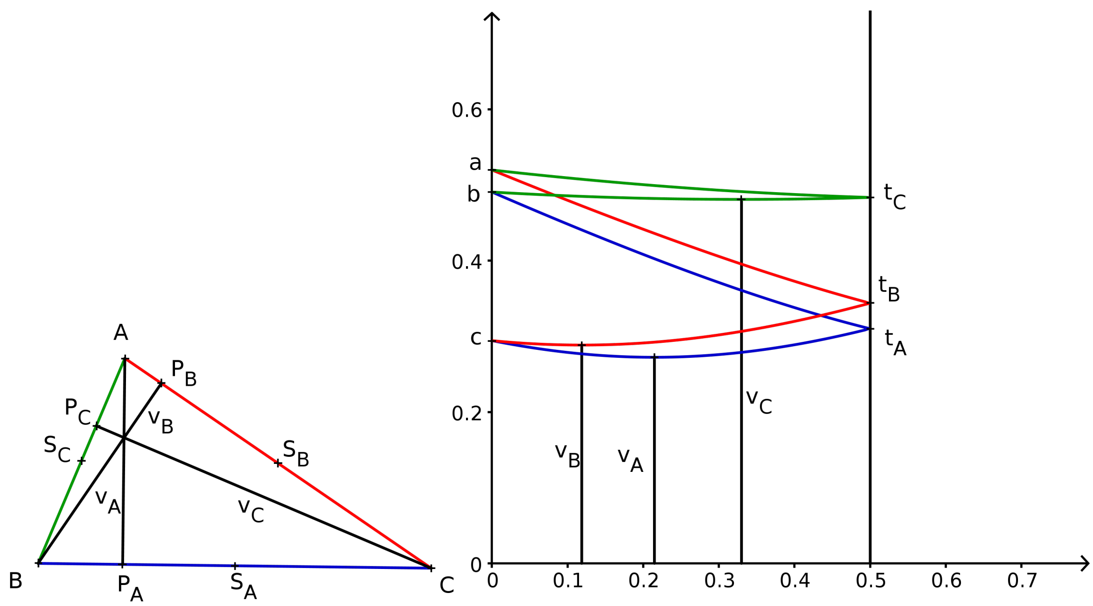
Podle Viètových vztahů musí být x_1, x_2, x_3 kořeny polynomu $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = (x-6)(x-2)(x-3)$. Tedy máme řešení, soustavu splňují trojice $[2, 3, 6]$, $[2, 6, 3]$, $[3, 2, 6]$, $[3, 6, 2]$, $[6, 2, 3]$, $[6, 3, 2]$.

Úloha 2.7. Henry dostal od dětí dva trojúhelníky ABC, XYZ se stejným obsahem. Postupně je lepí do roviny všemi možnými způsoby. Ukažte, že existuje umístění těchto dvou trojúhelníků v rovině takové, že existuje přímka p, pro niž má každá přímka s ní rovnoběžná s oběma trojúhelníky průnik stejné délky.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$ a $x \geq y \geq z$, kde a, b, c (x, y, z) jsou standardně značené délky stran v trojúhelníku ABC (XYZ).
Protože je strana BC $(|BC| = a)$ nejdelší strana v trojúhelníku ABC, přísluší jí také nejkratší výška a úhel při vrcholu A je největší vnitřní úhel $\triangle ABC$. Proto jsou zbylé dva vnitřní úhly ostré. Z toho plyne, že pata P_A výšky v_A leží uvnitř strany BC.



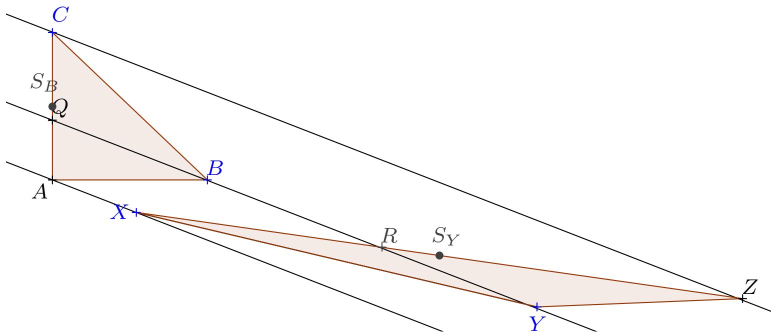
Nyní si definujme šestici funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Každá z těchto šesti funkcí odpovídá jedné úsečce na obvodu $\triangle ABC$ spojující vrchol se středem některé strany. Například úsečce BS_A odpovídá následující funkce: funkční hodnota v čísle $r \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ je vzdálenost bodu A od bodu R, který na dané úsečce BS_A je od bodu B ve vzdálenosti $r \cdot |BC|$. Poznamenejme, že funkční hodnota v nule je rovna c a funkční hodnota v $\frac{1}{2}$ délce těžnice t_A. Podobně úsečce CS_A odpovídá funkce, přiřazující čislu $r \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ vzdálenost bodu A od bodu $R \in CS_A$ takového, že $|RC| = r \cdot |BC|$.
Analogicky definujme zbylé čtyři funkce. Zřejmě jsou všechny spojité.
Následující obrázek znázorňuje grafy všech šesti funkcí.



Sjednocení oborů hodnot těchto funkcí je pak interval $\langle v_A, a \rangle$, neboť výška v_A je nejkratší spojnice vrcholu s bodem na protější straně a strana BC naopak nejdelší. Úplně stejně definujme šestici takových funkcí i pro trojúhelník XYZ. Sjednocení oborů hodnot těchto šesti funkcí je pak symetricky interval $\langle v_X, x \rangle$. Když si takové dva grafy dáme přes sebe, je s ohledem na spojitost funkcí jasné, že se protnou. Tento průsečík zastupuje dvojici

bodů Q, R ležících postupně na obvodech trojúhelníků ABC, XYZ, jejichž vzdálenosti od protějších vrcholů v trojúhelnících jsou stejné. Krom toho dělí strany, na nichž leží ve stejných poměrech. Předpokládejme pro jednoduchost, že $Q \in AS_B$ a $R \in AS_Y$. Zbylé případy jsou totiž symetrické.
Umístěme trojúhelníky ABC, XYZ do roviny tak, aby ležely body Q, B, R, Y na přímce jako je vidět na obrázku. Tuto přímku nazveme p. Platí

$$\frac{|QA|}{|S_BA|} = \frac{|RX|}{|S_VX|}$$
$$\frac{|QA|}{|AC|} = \frac{|RX|}{|XZ|}$$



A protože obsahy trojúhelníků ABC, XYZ jsou stejné, jsou přímky AX a CZ rovnoběžné s p. Z principu dělícího úhlu a toho, že $|QB| = |RY|$ pak plyne, že každá rovnoběžka s p má s oběma trojúhelníky stejně dlouhý průnik. Hotovo.