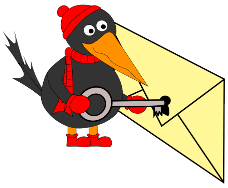
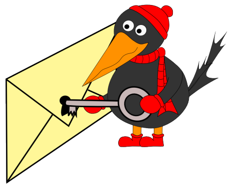
Řešení 1. série



# Dirichletův princip



autor: *Stopa a Vláďa*

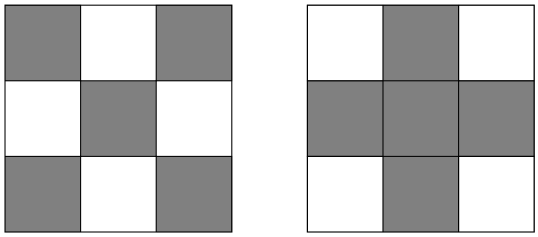
**Úloha 1.1.** Henry si vyjel společně s Matějem, Liběnkou a Bublou na výlet pod stan. Jedno deštivé odpoledne společně hráli pexeso, které mělo dohromady 32 dvojic. Aby to bylo spravedlivé, rozhodli se, že po úspěšném sebrání dvojice hráč netáhne znovu. Navíc si všichni pamatují, které dvojice již byly společně otočené, takže jedna dvojice kartiček nemůže být otočena podruhé. Když už hráli opravdu dlouho, Matěj to nevydržel a prohlásil: „Už jsme odehráli 2013 tahů. Někdo z nás přeci musí mít už nejméně čtvrtinu všech dvojic!“ Bylo to skutečně tak? Své tvrzení nezapomeňte řádně odůvodnit.

**Řešení.** Kartiček je dohromady 64, existuje tedy zřejmě $64 \cdot 63/2 = 2016$ možných tahů. Pouze 32 z nich je ale správných. Protože víme, že žádný tah nebyl zahrán dvakrát, jsou tu právě tři tahy, které ještě nebyly zahrány. V nejhorším možném případě jsou to právě tahy odpovídající sebrání nějaké dvojice, tedy už bylo sebráno nejméně $32-3 = 29$ dvojic. Protože hráči jsou čtyři a $29 = 4 \cdot 7 + 1$, má dle Dirichletova principu jeden z nich u sebe alespoň osm dvojic, což je přesně čtvrtina všech dvojic.

**Úloha 1.2.** Jakmile se udělalo hezky, vyšli naši přátelé na procházku. Dorazili až na vrchol blízkého kopce, kde byla krásná vyhlídka do okolí. Pod nimi se rozprostíralo mnoho malých políček – dohromady tvořili mřížku o rozměrech $2013 \times 2013$. Když nahoru dorazila i Liběnka, ihned zvolala: „Podívejte, na těch políčkách pobíhají poníci!“ „Z téhle výšky vypadají docela jako šachové figurky,“ odpověděl pohotově Henry. „Zajímalo by mne, kolik by se do té šachovnice pod námi vešlo koní, tak aby se žádní dva vzájemně neohrožovali.“ Pomozte Henrymu najít odpověď na tuto otázku.

**Řešení.** Mřížku obarvíme šachovnicově tak, že rohy budou mít černou barvu. Pak je na šachovnici zřejmě o jedno políčko více černých než bílých polí a tedy je černých polí $(2013 \cdot 2013+1)/2$. Každý kůň ohrožuje pouze pole opačné barvy, než je to, na kterém stojí. Umístíme-li tedy koně na všechna černá pole, nemohou se žádní dva navzájem ohrožovat. Nyní ukažme, že pokud je na šachovnici alespoň $(2013 \cdot 2013 + 1)/2 + 1$ koní, musí se již některéí dva vzájemně ohrožovat.
Umístíme tedy na šachovnici $(2013 \cdot 2013 + 1)/2 + 1 = 2026086$ koní a dále rozdělme šachovnici na čtverce $3 \times 3$. Takových čtverců bude zřejmě $671^2 = 450241$. Ve čtverci lze spárovat políčka na obvodu, která se koňským tahem vzájemně ohrožují. Nelze tedy do čtverce umístit více jak čtyři koně na obvodu plus jednoho doprostřed. To je nejvýše pět koní na čtverec. Pak tedy z Dirichletova principu plyne, že nejvýše $5 \cdot 671^2 - (2013 \cdot 2013 + 1)/2 = 225119$ čtverců neobsahuje pět koní. Tedy alespoň $450241 - 225119 = 225122$ čtverců obsahuje pět koní. Nyní rozdělme čtverce na dvojice sousedních čtverců tak, že každý (až na jeden rohový) čtverec budou v právě jedné dvojici. Těchto dvojic je zřejmě $(671^2 - 1)/2 = 225120$. Z Dirichletova principu tedy plyne, že alespoň jedna dvojice je

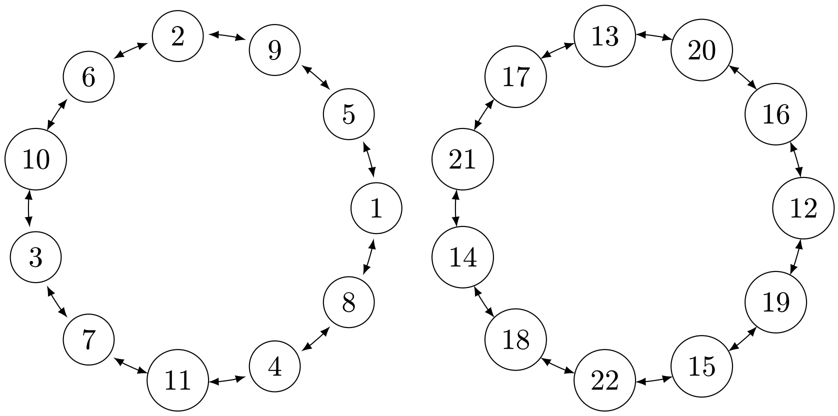
celá obsazená, tedy existují dva sousední čtverce s pěti koňmi. Snadným ověřením však zjistíme, že jediné dvě možnosti jak umístit do čtverce pět koní jsou:



Snadno nahlédneme, že žádnou dvojici těchto rozestavění nelze umístit vedle sebe tak, aby se koně vzájemně neohrožovali, což jsme chtěli dokázat.

**Úloha 1.3.** Mezitím si Matěj s Bublou hráli u mraveniště. Očíslovali si jednotlivé mravence čísly od 1 do 2013 a pak se předháněli, kdo nasbírá víc mravenců tak, aby se čísla žádných dvou nelišila o 4 nebo o 7. Po chvilce Matěj prohlásil, že jich nasbíral nejvíce, co vůbec jde a Bubla po chvilce musela přiznat, že má Matěj pravdu. Kolik nasbíral Matěj mravenců?

**Řešení.** Vzorové řešení podle řešení *Martina Surmy*:
Řekneme, že dva mravenci se ohrožují, pokud je rozdíl jejich čísel 4 nebo 7. Dále si mravence rozdělíme do 183 skupin po 11 mravencích, přičemž v $n$-té skupině budou mravenci $11n-10, 11n-9, \ldots, 11n$. Nyní ukažme, že z žádné takové skupiny nemůžeme vybrat více než pět mravenců, aniž by se někteří dva ohrožovali. Každý mravenec ve skupině ohrožuje právě dva další, navíc ohrožování tvoří uzavřený cyklus (pro $n$ větší než 1 to zřejmě platí analogicky:




Zřejmě nesmíme vzít dva sousední mravence v tomto cyklu, tedy je jasné, že jich z každé jedenáctice můžeme vzít nejvýše pět.
Zbývá ukázat, že jich skutečně můžeme vzít pět z každé jedenáctice. Všimneme si zajímavé vlastnosti těchto cyklů a to, že každý mravenec ohrožený mravencem v jiném cyklu je na odpovídajících sousedních pozicích v cyklu. Např 10 ohrožuje 14 a 17 a ty jsou na odpovídajících pozicích k pozicím 6 a 3. To vyplývá ze skutečnosti, že $4+7=11$. Pak je tedy zřejmé, že vezmeme-li z každého cyklu „stejnou“ pětici (pětice se budou lišit pouze v násobku jedenácti), nemohou se žádní dva mravenci ohrožovat. Tím je řešení u konce. Máme totiž nyní $5 \cdot 183 = 915$ mravenců a víme, že je to maximální počet.

**Úloha 1.4.** Kouma a Ňouma trávili své prázdniny také v přírodě. Na cestách společně hráli různé matematické hry. Jednou hráli hru, při které si Kouma vždy vymyslel celkem 125 navzájem různých přirozených čísel nepřesahujících 2013 a Ňouma si poté na papír zapisoval všechny možné rozdíly některých dvou z nich. Po několika hrách zjistili, že ať už si Kouma zvolí čísla jakkoliv, vždy Ňouma nakonec napíše některý rozdíl alespoň pětkrát. Zvládli byste to dokázat?

**Řešení.** Seřaďme Koumova čísla podle velikosti a označme je

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{125}.$$

Uvažme nyní 124 rozdílů $a_{i+1} - a_i$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, 124\}$. Protože jsme si Koumova čísla hezky seřadili, víme, že každý z těchto rozdílů je kladný (Koumova čísla jsou po dvou různá). Zároveň víme, že součet $S_1$ všech těchto 124 rozdílů je roven

$$S_1 = (a_{125} - a_{124}) + (a_{124} - a_{123}) + \cdots + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_{125} - a_1$$

Podobně uvažme 62 rozdílů $a_{2i+1} - a_{2i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 62\}$. Každý z těchto rozdílů je alespoň 2 a součet $S_2$ všech těchto 62 rozdílů je roven

$$S_2 = (a_{125} - a_{123}) + (a_{123} - a_{121}) + \cdots + (a_7 - a_5) + (a_5 - a_3) + (a_3 - a_1) = a_{125} - a_1$$

Víme, že Koumova čísla jsou přirozená a nepřesahující 2013, tedy speciálně $a_{125} \leq 2013$ a $1 \leq a_1$. Sečtením těchto nerovností dostáváme, že

$$\begin{aligned} a_{125} + 1 &\leq 2013 + a_1 \\ S_1 = S_2 = a_{125} - a_1 &\leq 2012 \\ S_1 + S_2 &\leq 4024 \end{aligned}$$

Nyní je třeba říci, že všechny rozdíly, které jsme uvažovali v součtech $S_1, S_2$, jsou rozdíly různých dvojic čísel. Proto je Ňouma bude muset vypsat na svůj papír. Ňouma tedy napíše všech těchto 186 kladných čísel. Jejich součet bude roven $S_1 + S_2$, tedy nejvýše 4024.

Ukažme nyní, že některých pět z těchto čísel bude stejných. Tento důkaz povedeme sporem (a velmi podobně, jako se dokazuje Dirichletův princip):

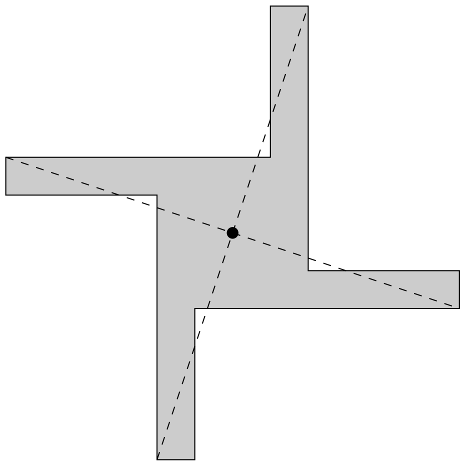
Předpokládejme tedy pro spor, že mezi našimi 186 přirozenými čísly neexistuje pětice stejných čísel. Potom součet $S_1 + S_2$ všech našich 186 čísel je nejméně

$$S_1 + S_2 \geq 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \cdots + 4 \cdot 45 + 4 \cdot 46 + 2 \cdot 47 = 4418,$$

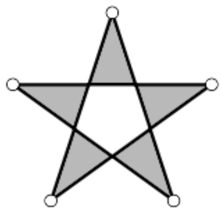
což je spor s $S_1 + S_2 \leq 4024$. Tedy předpoklad nenastane a vždy bude mezi Ňoumovými čísly pět, která si budou rovna.

**Úloha 1.5.** Když se naši výletníci ráno vzbudili, na nedalekém poli objevili obrazec v obilí ve tvaru mnohoúhelníku. Přestože se zjistilo, že to byl jen vtípek místních táborníků, obrazec byl natolik působivý, že na něj Bubla chtěla mít památku a nakreslila si ho do prázdninového deníku. Když ho chtěla zakreslit, stoupla si pro lepší výhled dovnitř obrazce, ale zjistila, že nevidí žádnou stranu mnohoúhelníku celou. Nakreslete, jak mohl obrazec v obilí vypadat.

**Řešení.** Řešení může mít různé podoby, jedna z nich může vypadat například následovně:



Další možné, velice originální řešení poslal *Matej Lieskovský*. Podmínce v zadání může vyhovovat mnohoúhelník, kterému se protínají strany, například pentagram, který se opravdu počítá mezi mnohoúhelníky. Zajímavé je, že u těchto netypických mnohoúhelníků je stále jasně definováno, kde je „uvnitř“ a kde „venku“, takže by šli vytvořit v obilném poli. V zadání bylo požadováno, aby existoval bod, ze kterého nebude vidět žádná strana celá, ale pentagramu to dokonce platí pro všechny body a tím je toto řešení výjimečné.



**Úloha 1.6.** Když se Kouma a Ňouma vrátili z výletu, rozhodl se Ňouma, že Koumovi ukáže svůj nejnovější vynález. Byla to krabička, do které se na jedné straně vložilo přirozené číslo $n$ a na druhé straně vypadlo číslo $(n+4)(n+11)(n+18)...(n+2013)$. Koumu zaujalo, že každé číslo, které z krabičky vypadlo, končilo alespoň 57 nulami. Zvládnete tuto skutečnost dokázat?

**Řešení.** Stačí si uvědomit, že pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí, že z pěti čísel

$$n+4+7k, n+4+7(k+1), n+4+7(k+2), n+4+7(k+3), n+4+7(k+4)$$

je právě jedno dělitelné pěti, neboť se mezi nimi vyskytují všechny možné zbytky po dělení pěti (je to také speciální důsledek Čínské zbytkové věty). Pokud si všech 288 závorek rozdělíme na 57 pětic a jednu trojici, vidíme proto, že celkový součin je dělitelný $5^{57}$. Podobně můžeme ukázat, že je dělitelný také $2^{57}$. Protože mocniny dvojky a pětky jsou nesoudělné, musí být celkový součin dělitelný $10^{57}$, takže končí alespoň 57 nulami (ve skutečnosti dokonce více, protože jsme nezkoumali dělitelnost vyššími mocninami pětky).

**Úloha 1.7.** V Hloupětíně se o prázdninách konala tradiční přehlídka matematických úloh z celého přilehlého okolí. V Lenošíně byli líní, a tak jediným jejich příspěvkem byla prachobyčejná soustava tří rovnic. Hloupětínští však přesto měli potíže, objevit reálná čísla $x, y, z$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 + z^4 &= 4z^3 \\ 3z^2 + x^2z^2 &= 2xy^2 \\ y^2 + z^2 &= 2x^2yz. \end{aligned}$$

Najděte všechna řešení této soustavy.

**Řešení.** Sečteme všechny rovnice a upravujeme:

$$\begin{aligned}
2x^2y^2 + z^4 + 4z^2 + x^2z^2 + y^2 &= 4z^3 + 2xy^2 + 2x^2yz \\
x^2y^2 - 2x^2yz + x^2z^2 + z^4 - 4z^3 + 4z^2 + x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 &= 0 \\
x^2(y^2 - 2yz + z^2) + z^2(z^2 - 4z + 4) + y^2(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\
(x(y - z))^2 + (z(z - 2))^2 + (y(x - 1))^2 &= 0
\end{aligned}$$

Aby byl součet tří druhých mocnin roven nule, musí být každá z nich rovna nule. Pokud jsou všechny proměnné nenulové, musí platit $x = 1, y = z = 2$, což ale neodpovídá prvním dvěma zadným rovnicím. Alespoň jedna z proměnných proto musí být nulová, z čehož po dosazení do třetí rovnice plyne $y = z = 0$. Po dosazení do ostatních rovnic vidíme, že jsou splněny nezávisle na hodnotě $x$. Všechna řešení soustavy jsou proto tvaru $x = t, y = z = 0$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné.