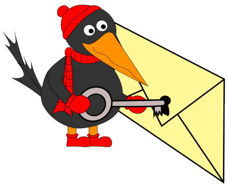
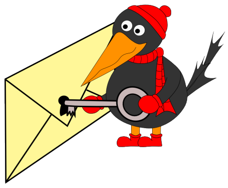


Řešení 6. série

Extrémní série

autor: *Bzzzučík a Shymo*



Úloha 6.1. Matematické příklady se musí někde tvořit a je to velice složitý proces. V Hloupětíně se nacházely továrny Alfamatik a Betametr, které obě vyráběly příklady. Alfamatik vyrobí za týden 10 příkladů, kdežto Betametr jich vyrobí 16. Příklady se dodávají do čtyř obchodů v Lenošíně. Obchod na ulici Kuželová vyžaduje 6 příkladů týdně, na Limitní třídě jich požadují 8 týdně, na Množinovém náměstí žádají 5 příkladů týdně a v obchodním domě Negace jich chtějí 7 za týden. Cena dopravy z obou továren do jednotlivých obchodů se řídí následující tabulkou:

	K	L	M	N
A	8	4	6	3
B	7	6	5	5

Jaká je nejlevnější možnost dopravy příkladů z továren do obchodů (každý obchod může nakupovat od obou továren)?

Řešení. Vytvorme tabuľku všetkých možností dopravy z tovární do obchodov:

	K	L	M	N	$\sum$
A	$6-\alpha$	$8-\beta$	$5-\gamma$	$7-\delta$	10
B	α	β	γ	δ	16
$\sum$	6	8	5	7	

Samozrejme, je dôležité, že parametre splnia určité podmienky, keďže napr. množstvo dopravených kusov nemôže byť záporný:

$$\begin{gathered}\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0\\ \alpha \leq 6, \beta \leq 8, \gamma \leq 5, \delta \leq 7\\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 16\end{gathered}$$

Teraz už môžeme zapísať funkciu celkových nákladov na dopravu z tabuľky nákladov:

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 8(6-\alpha) + 7\alpha + 4(8-\beta) + 6\beta + 6(5-\gamma) + 5\gamma + 3(7-\delta) + 5\delta\\ &= 131 - \alpha + 2\beta - \gamma + 2\delta \to \min\end{aligned}$$

Minimalizovať túto funkciu vzhľadom na podmienky môžeme aj logickým odvodením. Keďže všetky premenné sú nezáporné, tie so záporným koeficientom chceme maximalizovať (α a γ) a tie s kladným minimalizovať (teda β a δ). Keďže $\alpha \leq 6$ a $\gamma \leq 5$, tak najviac môže byť $\alpha^* = 6$ a $\gamma^* = 5$. Je však jasné, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 16$, takže $\beta + \delta = 5$. Pre nás by bolo najvýhodnejšie, aby sme radšej maximalizovali tú premennú, ktorá má nižší koeficient, a tým pádom menej zvyšuje minimalizovanú funkciu f. Lenže koefienty pri oboch sú v danej funkcií rovné 2, takže nám je jedno, akej hodnoty bude nabývať β^* a δ^*, pokiaľ však splnia podmienky.

Teraz už môžeme jednoducho zapísať riešenie, a to napríklad takýmto štýlom:

$$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*) = (6, a, 5, 5-a), a \in \langle 0, 5 \rangle;$$
$$f(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*) = 131 - 6 + 2a - 5 + 10 - 2a = 130.$$

Úloha má teda nekonečne veľa riešení, pričom všetky cesty stoja najmenej 130.

Úloha 6.2. Matěj s Liběnkou si udělali jednoho dne volno a řekli si, že společně zajdou na exkurzi do továrny Alfamatik. Viděli zde mnoho zajímavých přístrojů, ale Liběnku zaujala výrobní linka, která tvořila 200 cm dlouhé příklady. Podle objednávkového listu poblíž však velkoobchod v Lenošíně požadoval 40 kusů příkladů délky 90 cm, 25 kusů délky 75 cm a 30 kusů délky 60 cm. Kolik nejmíň kusů příkladů délky 200 cm potřebuje továrna vyrobit, aby dokázala pokrýt objednávku? Příklady se nedají znovu slepovat a zbytky z 200cm kusů se jednoduše vyhodí (nebo pošlou na vyřešení Henrymu).?

Řešení. Keďže máme vyrobené 200 cm dlhé kusy príkladov a príklady sa nedajú spájať naspäť dokopy, existuje len zopár variant výroby 95 cm, 75 cm a 60 cm dlhých príkladov z jedného 200 centimetrového:

varianta	95 cm	75 cm	60 cm
A	2	0	0
B	1	1	0
C	1	0	1
D	0	2	0
E	0	1	2
F	0	0	3

Zo zadania plynie, že potrebujeme určité množstvo z každej dĺžky. Keď si označíme a počet papierov rozstrihaných variantou A, b variantou B atď., tak to môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= 40 \\ b + 2d + e &= 25 \\ c + 2e + 3f &= 30 \\ a, b, c, d, e, f &\geq 0 \end{aligned}$$

Samozrejme, keďže nám ide o to splniť dodávku čo najlacnejšie, chceme využiť čo najmenej 200 cm dlhého papiera, preto naša úloha bude vyzerať takto:

$$f(a, b, c, d, e, f) = a + b + c + d + e + f \to \min$$

Teraz už môžeme úlohu riešiť. Úlohu si vieme prehľadne zapísať do tzv. simplexovej tabuľky:

$$\begin{array}{r|cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 40 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

V tejto tabuľke máme v prvom riadku a prvom stĺpci 0 (súčasnú hodnotu funkcie, kde zatiaľ všetky premenné sú rovné 0) a zvyšok prvého riadku sú koeficienty pred jednotlivými premennými v minimalizovanej funkcií. Zvyšok je vyjadrenie podmienok kladených na koeficienty. Prvou úlohou bude nájsť nejaké vyhovujúce riešenie úlohy (teda riešenie spĺňajúce podmienky). To urobíme tak, že si zvolíme 3 premenné (keďže máme 3 podmienky), a pomocou nich vyjadríme úlohu. Najjednoduchšie/najprirodzenejšie bude, keď si zvolíme zrovna tie 3 metódy, kde sa vyrába vždy jedna dĺžka (jeden typ) príkladov, čo sú pre nás premenné a, d, f. Pre ne dokonca ľahko vieme odvodiť, koľko papierov máme nastrihať danými spôsobmi (potrebujeme 20 papierov nastihaných metódou a, $\frac{25}{2}$ papierov metódou b a 10 metódou c, dokopy teda $\frac{85}{2}$ papierov). Premenné musíme dostať do tvaru, že žiadna z nich nebude figurovať v minimalizovanej funkcií (ich koeficient v prvom riadku je 0) a zároveň každá premenná sa bude dať vyjadriť v podmienke iba pomocou zvyšných premenných (pre nás b, c, e). Inak povedané, v každej podmienke musí byť jedna 1, nad a pod ktorou budú samé 0. V takomto stave sa dá najlahšie rozpoznať, čo s úlohou ďalej.

$-\frac{85}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0
20	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{25}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
10	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1

Z tabuľky je potom vidno všetko, čo sme už skonštatovali. Je tu však vidno aj to, že ešte nie sme v optimálnom riešení, keďže premenná e má koeficient v minimalizačnej funkcií záporný. Nahradíme ju teda za premennú f, ktorá môže nadobudnúť maximálnu hodnotu 15, aby neporušila nezápornosť premenných:

-40	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
20	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{3}{4}$
15	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

Tu už je vidno, že si jednoducho nepolepšíme, keďže koeficienty premenných b, c, f sú nezáporné. Na druhej strane je však vidno, že keď použijeme metódu b, tak si nepohoršíme. Nahraďme ňou teda metódu strihania d, ktorá môže nadobudnúť maximálnu hodnotu 5.

-40	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
15	1	0	$\frac{1}{4}$	-1	0	$\frac{3}{4}$
10	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{3}{2}$
15	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

Máme teda 2 riešenia:

$$(a', b', c', d', e', f') = (20, 0, 0, 5, 15, 0) \text{ a } (a^*, b^*, c^*, d^*, e^*, f^*) = (15, 10, 0, 0, 15, 0)$$

s optimálnymi hodnotami 40. Na splnenie objednávky je teda potrebných aspoň 40 papierov, pričom objednávka sa dá splniť 2 spôsobmi.

Úloha 6.3. Ve skutečnosti se Henry zrovna jedním takovým zbytkem zabýval. Nebylo poznat, co je na kusu příkladu napsané, ale to Henrymu vůbec nevadilo. Příklad měl tvar obdélníku $ABCD$ se stranami $|AB| = 6$ a $|BC| = 12$. Henry příklad přehnul tak, aby bod B ležel na straně AD. Zaradoval se, když zjistil, že délka ohybu je nejkratší možná. Jaká byla délka ohybu?

Řešení. V úlohe máme 3 možnosti zalomenia:

Zalomenie v AB a CD

Tento prípad nebudeme ďalej rozoberať. Dĺžka rezu je automaticky väčšia než 12, čo sa ukáže príliš veľa.

Zalomenie v AB a BC

Príklad bol zalomený v bode E na strane AB a v bode F na strane BC a našou úlohou je nájsť najkratšiu možnú $|EF|$. Označme $0 \leq |EB| = a \leq 6$ a $0 \leq |BF| = b \leq 12$. Samozrejme potom $|EF| = \sqrt{a^2+b^2}$, keďže trojuholník EBF je pravouhlý. Ďalej označme B' bod, kam sa bod B dostal po ohnutí a dostaneme trojuholník $EB'F$, ktorý je v osovej súmernosti s EBF podľa prepony. Z toho vyvodíme, že trojuholník EAB' (ktorý je tiež pravouhlý) má dĺžky strán $|EA| = 6-a$ a $|B'E| = a$, z čoho ľahko vyvodíme, že $|AB'| = \sqrt{12a-36}$. Z toho už je vidno, že $3 \leq a \leq 6$. Posledný zavedený bod bude F', ktorý zavedieme tak, aby $F'FCD$ tvoril obdĺžnik. Tým zároveň vytvoríme ďalší pravouhlý trojuholník $B'F'F$, kde $|B'F| = b$ a $|F'F| = 6$. Z toho opäť ľahko dopočítame, že $|B'F'| = \sqrt{b^2-36}$, odkiaľ je jasné, že $6 \leq b \leq 12$. No a teraz si už len uvedomíme, že $|AB'| + |B'F'| = |AF'| = |BF| = b$ dostávame vzťah:

$$\begin{aligned}
\sqrt{12a-36} + \sqrt{b^2-36} &= b \\
\sqrt{b^2-36} &= b - \sqrt{12a-36} \ /^2 \\
b^2 - 36 &= b^2 - 2b\sqrt{12a-36} + 12a - 36 \\
b\sqrt{12a-36} &= 6a \\
b &= a\sqrt{\frac{3}{a-3}}
\end{aligned}$$

Tým pádom dostávame vzťah k optimalizácií:

$$\begin{aligned}
|EF| = \sqrt{a^2+b^2} &\to \min \\
a^2 + b^2 &\to \min \\
a^2\left(1 + \frac{3}{a-3}\right) &\to \min
\end{aligned}$$

Samozrejme, to uvažujeme iba preto, že odmocnina je prostá funkcia. Zaveďme ďalej substitúciu $a - 3 = c$ a dostaneme:

$$(c+3)^2\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

$$c^2 + 9c + 27 + \frac{27}{c}$$

To si všimneme, že je to isté ako výraz:

$$\left(c - \frac{3}{2}\right)^2\left(1 + \frac{12}{c}\right) + 60\frac{3}{4}$$

Čo je to isté ako minimalizovať

$$\left(c - \frac{3}{2}\right)^2\left(1 + \frac{12}{c}\right).$$

No a z tohto výrazu je jasné, že pre kladné c je výraz vždy kladný, iba v hodnote $c = \frac{3}{2}$ nadobúda hodnoty 0. Preto je minimum tam, čo znamená:

$$a = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$
$$b = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$$
$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Zalomenie v AD a BC

Príklad bol zalomený v bode E na strane AD a v bode F na strane BC a opäť máme v bode B' obraz. Spolu tvoria $BFB'E$ kosoštvorec. Označme $\sphericalangle FBE = \alpha$. Potom z kosínusovej vety platí

$$|EF|^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\alpha),$$
$$|EF|^2 = 2a^2(1 - \cos(\alpha)).$$

Z toho vidíme, že s klesajúcim uhlom rastie kosínus a teda klesá dĺžka $|EF|$. Preto stotožníme bod B' s bodom D. Stačí nám už len zadefinovať bod S ako stred BD. Dĺžka $|BD| = \sqrt{6^2 + 12^2}$ je jasná z Pytagorovej vety. Stačí už len uvidieť podobnosť trojuholníkov BCD a BSF, z ktorej

$$\frac{|SF|}{|BS|} = \frac{|CD|}{|BC|},$$
$$|EF| = 2|SF| = |BS| = \frac{1}{2}|BD|,$$

z čoho $|EF| = 3\sqrt{5}$. A keďže $3\sqrt{5} < \frac{9}{2}\sqrt{3} < 12$, najmenší rez je urobený tretím spôsobom a je dlhý $3\sqrt{5}$. Za inšpiráciu k riešeniu patrí vďaka *Tadeášovi Kučerovi.*

Úloha 6.4. To Matěje zaujal jiný stroj. Měl tvar nekonečné čtvercové sítě přihrádek rozdělené vodorovnou čarou na dvě části. Oba chvíli stroj pozorovali a pak se Matěj zeptal: „Vidíš v tom nějaké pravidlo? Jak ten stroj pracuje?“ Liběnka se na něj usmála: „Ale to je jednoduché. Na začátku se umístí do některých přihrádek pod čarou po jednom příkladu a pak přes sebe příklady skáčou. To znamená, že vždy nějaký příklad přeskočí jeden sousední příklad (vodorovně, svisle nebo diagonálně), a poté se odstraní ten příklad, který byl přeskočen. Přitom musí skákat na volné pole. Ale zajímalo by mě, kolik je potřeba na začátku minimálně příkladů, aby mohl některý z nich doskákat až do páté úrovně nad čarou.“ Matěj se nad otázkou zamyslel a netrvalo mu dlouho, než na odpověď přišel. Najdete ji s řádným zdůvodněním i vy?

Řešení. Všimneme si, že na posun do n-té úrovně musíme mít alespoň jeden kámen na úrovni $(n-1)$ a jeden na úrovni $(n-2)$. Díky tomuto jednoduchému pozorování jsme schopni přijít na spodní hranici pro hledané číslo následovně. Označíme si tuto spodní hranici $P(n)$. Triviálně $P(0) = 1$, neboť tam můžeme hned začít, a $P(1) = 2$, protože od začátku můžeme mít správně položené oba potřebné příklady. Tedy pro další úrovně je spodní hranice alespoň $P(2) = P(1) + P(0) = 3$, $P(3) = P(2) + P(1) = 5$, $P(4) = P(3) + P(2) = 8$ a $P(5) = P(4) + P(3) = 13$. Teď už tedy víme, že minimální počet příkladů je 13.

To ale ještě neznamená, že to 13 musí být. Pravděpodobně nejjednodušší způsob, jak ukázat, že je to opravdu 13, je najít konkrétní příklad:

			l					
				jl				
			hj		kl			
		ej	fh			gk		
	ae		bh	cf			dgik	
e	a		b	c	f	i	d	g
	a		b	c	i		d	

Skáčeme postupně po písmenkách podle abecedy a trojice je vždy označena stejným písmenkem.

Úloha 6.5. Kouma s Ňoumou měli oproti tomu mnohem volnější zábavu. Vyšli si společně do lesa a sbírali nezáporná celá čísla. Ňouma jich nasbíral plný košík, ale když je ukázal Koumovi, nestačil se divit: „Vždyť ty jsi nasbíral samá nejedlá čísla!“ začal Kouma. „Musíš sbírat jen ta jedlá. Jedlé číslo je takové, které se dá zapsat jako součet druhé, čtvrté a páté mocniny nějakých nezáporných celých čísel. Třeba tady, podívej!“ Kouma ukázal na nedaleko rostoucí číslo pět. „Dá se zapsat jako $5 = 2^2 + 0^4 + 1^5$, takže je jedlé. Zajímala by mě jedna věc. Je mezi čísly do 10^{20} více jedlých nebo nejedlých?“ Jaká je odpověď na Koumovu otázku?

Řešení. Podíváme se na to, kolik je čísel tvaru $z = a^2 + b^4 + c^5 \leq 10^{20}$, kde a, b, c jsou nezáporná celá čísla. Z nerovnosti plyne, že $a \leq 10^{\frac{20}{2}} = 10^{10}$, $b \leq 10^{\frac{20}{4}} = 10^5$ a $c \leq 10^{\frac{20}{5}} = 10^4$. Takových trojic je tedy maximálně $(10^{10}+1) \cdot (10^5+1) \cdot (10^4+1)$, což je jistě méně než $\frac{10^{20}}{2}$. Jedlých čísel do 10^{20} je tedy méně než těch nejedlých.

Úloha 6.6. Poté, co nasbírali dost čísel, šli se projít hlouběji do lesa. Došli až na palouček, kde je čekala velice zajímavá podívaná. Na paloučku byl zavedený souřadnicový systém a přímo uprostřed na souřadnicích $[0, 0]$ stál muflon (M). Na přímce $y = 1$ se pohybovala ondatra (O). Dále se na paloučku pohybovalo divoké prase (P) a srnec (S) a to takovým způsobem, že $MOPS$ byl čtverec. Jaký tvar měly pěšinky, po kterých prase a srnec chodili (po jakých křivkách se pohybují)?

Řešení. Platí, že $MOPS$ je čtverec, a proto bod S je nutně obrazem bodu O v rotaci R_1 okolo bodu M o $\frac{\pi}{2}$ (popřípadě $-\frac{\pi}{2}$ pro čtverec s pojmenováním po směru hodinových ručiček). Bod S_1 je zase obrazem složení rotace okolo S o $\frac{\pi}{4}$ (nebo $-\frac{\pi}{4}$) a stejnolehlosti s koeficientem $\sqrt{2}$ se středem M.

A protože se bod O pohybuje po přímce $y = 1$, tak i bod S se musí pohybovat po obrazu této přímky v rotaci R_1 a tedy po přímce $x = -1$ (pro opačný případ $x = 1$). Také bod P se musí pohybovat po obrazu přímky $y = 1$ a to tentokrát ve složení rotace a stejnolehlosti S_1, pohybuje se tedy po přímce $y = 2 + x$ (nebo $y = 2 - x$).

A tedy tvary pěšinek, po kterých se prase a srnec pohybovali, jsou přímky.

Úloha 6.7. Když se vrátili z lesa, rozhodl se Kouma, že si uklidí v pokoji. Mezi velkou spoustou matematického nepořádku našel také vyjedený adventní kalendář. Zavzpomínal na předvánoční dobu a vzpomněl si, že tentokrát neotevíral jednotlivá políčka postupně, ale každý den si házel 24-stěnnou kostkou. Když mu padlo číslo k, otevřel k-té neotevřené políčko. Pokud se dostal přes políčko číslo 24, začal počítat od začátku. Bohužel si už nevzpomněl, které políčko otevřel (a snědl) jako poslední. S jakou pravděpodobností otevřel na Štědrý den políčko s číslem 24?

Řešení. Nejdříve si pro každý den určíme pravděpodobnost, že ten den nevyjedl 24. políčko za předpokladu, že ho nevyjedl ve dnech před tím. První den si hodí kostkou a otevře jednoduše políčko, které mu padlo. Že to neni zrovna to 24. má pravděpodobnost zřejmě $\frac{23}{24}$. Druhý den má opět 24 možností, co mu může padnout a opět jen 1 znamená, že si vyjí 24. políčko (to je možnost, že mu padne na kostce číslo 23, na číslo 24 si otevírá opět políčko s číslem 1) a tedy pravděpodobnost, že se tak nestane je $\frac{23}{24}$,...

Takhle to jde i další dny až do dne 13.12., kdy nám zbývá už jen 12 nevyjezených políček. To znamená, že na naše 24. políčko se dostane pokud na kostce hodíme nejen číslo 12, ale už i 24, pravděpodobnost, že se tak nestane je tedy $\frac{22}{24} = \frac{11}{12}$. Obdobné je to i dny 14.12., 15.12. a 16.12. Za to 17.12. nastává opět změna, zbývá nám už jen 8 nevyjezených políček, a proto na každé (tedy i na 24.) políčko vychází už 3 různá čísla při hodu kostky. A stejně tak je to i následující den a oba mají pravděpodobnost $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$, že v nich nebude vyjezeno políčko 24.

Obdobně pokračujeme i dále, 19.12. už zbývá jen 6 bonbonů, a tedy na 24. políčko to vyjde hned čtyřikrát, stejně jako o den později, a hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$. Dne 21.12. už zbývají pochoutky jen 4, takže už nesmí hodit hned 6 čísel (4, 8, 12, 16, 20, 24) a pravděpodobnost je $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Dne 22.12. už má jen 3 bonbony a 23.12. už jen 2, a proto pravděpodobnosti, že si to ani tyhle dny nepokazí jsou $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ a $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. Celková pravděpodobnost, že nevyjíme 24. políčko dříve než 24.12. je tedy součin pravděpodobností, že se to jednotlivé dny nestane a tedy:

$${\frac{23}{24}}^{12} \cdot {\frac{11}{12}}^{4} \cdot {\frac{7}{8}}^{2} \cdot {\frac{5}{6}}^{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \doteq 0,056.$$

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ